СУНЦ УрФУ, 2018 год
Решения вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 МИ, ФМ, ФХ классы
Вариант 1

Часть 1

1. *(2 балла)* Взвесили четырех кошек. Все кошки без первой весят 36 кг, без второй – 29 кг, без третьей – 38 кг, без четвертой – 32 кг. Сколько весит самая легкая кошка?

Решение. Пусть x, y, z, t кг – массы первой, второй, третьей и четвертой кошек соответственно. Тогда
$x+y+z+t-x=36,$
$x+y+z+t-y=29,$
$x+y+z+t-z=38,$
$x+y+z+t-t=32.$
Так как 38 – наибольшая из четырех разностей, то третья кошка самая легкая. Найдем z:
$(y+z+t)+(x+z+t)+(x+y+t)+(x+y+z)-3(x+y+t)=36+29+38+32-3\cdot 38$, $3z=21$, $z=7$.

Ответ. 7 кг.

2. *(2 балла)* Графики функций $y=(x-1)^4$ и $y=(x+3)^4$ проходят через точку $M(x_0,y_0)$. Найдите координаты точки M.

Решение. Найдем x_0, решив уравнение $(x-1)^4=(x+3)^4$: $|x-1|=|x+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=x+3, \\ x-1=-x-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $x=-1$. Подставим найденное значение x: $y=(-1-1)^4=16$.

Ответ. $(-1,16)$.

3. *(2 балла)* Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения $5x^2-18x+k=0$, причем $2x_1+5x_2=12$. Найдите k.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{18}{5}$, $x_1\cdot x_2=\frac{k}{5}$. Тогда $2\cdot\frac{18}{5}+3x_2=12$, откуда $x_2=\frac{8}{5}$, значит, $x_1=2$ и $k=5\cdot\frac{8}{5}\cdot 2=16$.

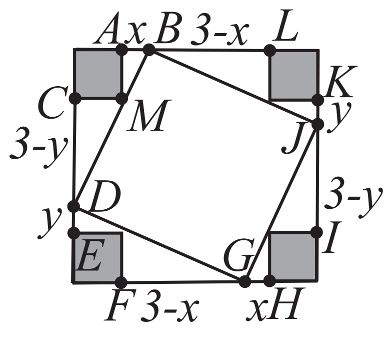
Ответ. 16.

4. *(3 балла)* Решите систему неравенств $\left\{\begin{array}{l} |2x+7|\geqslant|3x+5|, \\ x^2+2x-3\geqslant 0. \end{array}\right.$

Решение. Решим первое неравенство: $|2x+7|\geqslant|3x+5| \Leftrightarrow (2x+7)^2\geqslant(3x+5)^2 \Leftrightarrow$ $(2x+7-3x-5)(2x+7+3x+5)\geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(5x+12)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{12}{5};2\right]$. Решив второе неравенство, получим $x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. Пересекая это множество с $\left[-\frac{12}{5};2\right]$, получим $x\in[1;2]$.

Ответ. $x\in[1;2]$.

5. *(3 балла)* Вася очень любит математику и квадратные торты. Специально к Васиному дню рождения Алёна испекла большой квадратный торт 5×5 дюймов (толщиной торта пренебречь). Торт выдался настолько прекрасным, что Алёна не удержалась и откусила 4 угловых куска торта, размером 1×1 дюйм каждый, как это показано на рисунке. Теперь Алёна хочет вырезать из оставшейся части квадратный кусок максимально возможной площади и подарить его Васе. Найдите площадь куска (в дюймах квадратных), который достанется Васе.



Решение. Пусть $BJGD$ – искомый кусок торта. Обозначим $AB=x$, $ED=y$, тогда $BL=FG=3-x$, $GH=x$, $KJ=y$, $CD=JI=3-y$. Поскольку $BJGD$ – квадрат, получаем $(1+x)^2+(4-y)^2=DB^2=DG^2=(y+1)^2+(4-x)^2 \Leftrightarrow 2x-8y=2y-8x$, $x=y$. Чтобы площадь вырезаемого куска была наибольшей, необходимо, чтобы вершины откушенных квадратных кусков лежали на сторонах вырезаемого квадрата. Тогда из подобия треугольников ABM и CMD получаем $\frac{1}{3-x}=\frac{x}{1} \Leftrightarrow x(3-x)=1 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, корень с минусом подходит (под условие $x\in[0;3]$). Нам надо найти площадь квадрата, которая равна $DB^2=(1+x)^2+(4-x)^2=2x^2-6x+17=2(x^2-3x+1)+15=15$.

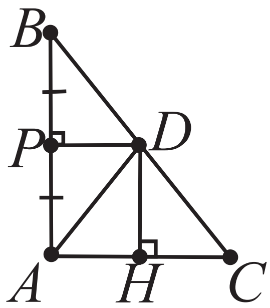
Ответ. 15.

6. *(3 балла)* Первое число составляет 70% от второго, а третье число – 50% от второго. Найдите эти числа, если их среднее арифметическое равно 44,88.

Решение. Пусть m, n, k – данные числа, тогда $m = 0,7n$, $k = 0,5n$, $m + n + k = 44,88 \cdot 3 \Leftrightarrow 2,2n = 44,88 \cdot 3 \Leftrightarrow n = 61,2$, $m = 42,84$, $k = 30,6$.

Ответ. $42,84$; $61,2$; $30,6$.

7. *(3 балла)* В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$ проведена медиана AD. Найдите радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD.



Решение. $\triangle ABC$ – прямоугольный, так как $BC^2 = AB^2 + AC^2$, тогда $AD = \frac{BC}{2} = 5 = BD = DC$. Пусть P – середина AB, тогда медиана DP в равнобедренном треугольнике ABD является высотой, поэтому $DP = \sqrt{BD^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{25 - 9} = 4$, тогда радиус вписанной окружности треугольника ABD равен $\frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD}{\frac{1}{2}(AB + 2BD)} = \frac{6 \cdot 4}{6 + 10} = 1,5$. Аналогично в треугольнике ADC: $DH = \sqrt{25 - 16} = 3$, радиус вписанной окружности равен $\frac{DH \cdot AC}{AC + 2DC} = \frac{8 \cdot 3}{8 + 10} = \frac{4}{3}$.

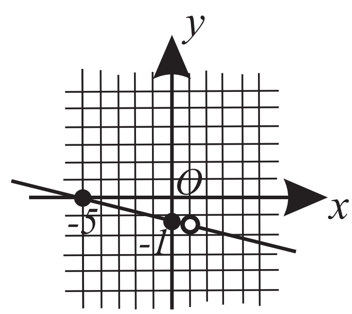
Ответ. $1,5$ и $\frac{4}{3}$.

8. *(2 балла)* На дверях двух комнат висят таблички, причем на одной из них написана правда, а на другой – ложь. Надпись на двери первой комнаты гласит: «В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр». На двери второй комнаты висит табличка со словами: «В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того, в одной из комнат сидит тигр». За какой же дверью сидит принцесса?

Решение. Пусть на двери первой комнаты верная надпись, тогда в другой комнате должен сидеть тигр, но тогда надпись на второй двери тоже истинна, что невозможно. Пусть на второй двери написана правда, тогда на первой – ложь. Поскольку тигр и принцесса не могут сидеть одновременно в одной комнате, то принцесса сидит во второй комнате.

Ответ. Во второй.

9. *(3 балла)* На рисунке справа постройте график функции
$y = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{4 - 4x}$.



Решение. Разложив числитель дроби на множители, получаем $y = \frac{(x+5)(x-1)}{4(1-x)}$, $y = -\frac{x+5}{4}$, $x \neq 1$. Точка с координатам $(1, -3/2)$ на графике прямой $y = -\frac{x+5}{4}$ выколотая.

Часть 2

10. *(4 балла)* Найдите все пары (x, y) целых чисел x и y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3625x^3 = 9947y^3, \\ y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$

Решение. Разложив на простые множители 3625 и 9947, получим $5^3 \cdot 29 \cdot x^3 = 29 \cdot 7^3 \cdot y^3$, откуда $5x = 7y$. Левая часть полученного равенства делится на 5, значит, правая часть тоже должна делиться на 5, т.е. $y \vdots 5$, с учетом условия $y^2 \leqslant 36 \Leftrightarrow -6 \leqslant y \leqslant 6$, находим, что $y \in \{-5, 0, 5\}$. При $y = -5$, $x = -7$. При $y = 0$, $x = 0$. При $y = 5$, $x = 7$.

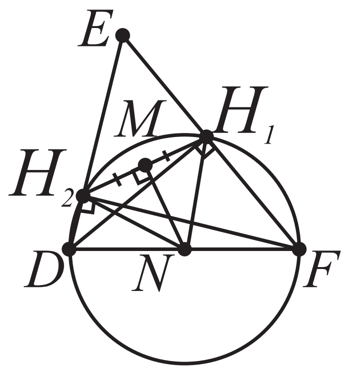
Ответ. $(-7, -5)$; $(0, 0)$; $(7, 5)$.

11. *(5 баллов)* Упростите до численного значения выражение

$$\frac{9\sqrt{7}\sqrt{a}+9\sqrt{3}\sqrt{b}}{8\sqrt{7}\sqrt{a}-8\sqrt{3}\sqrt{b}}:\frac{7a-3b}{28a+12b-8\sqrt{21ab}}.$$

Решение. $\frac{9\sqrt{7}\sqrt{a}+9\sqrt{3}\sqrt{b}}{8\sqrt{7}\sqrt{a}-8\sqrt{3}\sqrt{b}}:\frac{7a-3b}{28a+12b-8\sqrt{21ab}}=\frac{9(\sqrt{7}\sqrt{a}+\sqrt{3}\sqrt{b})}{8(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{3}\sqrt{b})}\cdot\frac{28a+12b-8\sqrt{21ab}}{7a-3b}=$
$=\frac{9(\sqrt{7}\sqrt{a}+\sqrt{3}\sqrt{b})}{8(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{3}\sqrt{b})}\cdot\frac{4(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{3}\sqrt{b})^2}{(\sqrt{7}\sqrt{a}+\sqrt{3}\sqrt{b})(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{3}\sqrt{b})}=4,5.$
Ответ. $4,5$.

12. *(6 баллов)* Отрезки DH_1 и FH_2 являются высотами остроугольного треугольника DEF. На середине стороны DF длины 26 отмечена точка N. На середине отрезка H_1H_2 длины 10 отмечена точка M. Найдите длину отрезка MN.



Решение. Так как $\angle DH_2F=\angle DH_1F=90^\circ$, точки D,H_2,H_1,F лежат на окружности с диаметром DF. Центром окружности является точка N, середина DF. Тогда $NH_2=NH_1=\frac{DF}{2}=13$, кроме того, $H_2M=\frac{H_2H_1}{2}=5$. Треугольник NH_1H_2 равнобедренный, медиана NM является в нем высотой и $NM=\sqrt{NH_2^2-H_2M^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

Ответ. 12.

13. *(6 баллов)* Сколько корней имеет уравнение $2x^2(x+1)=kx$ в зависимости от значения параметра k?

Решение. Заметим, что количество корней уравнения совпадает с количеством решений совокупности $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ 2x(x+1)=k. \end{array}\right.$ Уравнение $2x^2+2x-k=0$ не имеет корней при условии $D<0$, где $D=4+8k$, т.е. при $k<-0,5$. При $k=-0,5$ это уравнение имеет один корень $x=-0,5$, отличный от 0. При $k>-0,5$ это уравнение имеет 2 различных корня. Найдем, при каких значениях k уравнение $2x^2+2x-k=0$ имеет два корня, один из которых равен 0. Подставим $x=0$, получим $k=0$. Итак, при $k=0$ уравнение $2x^2+2x-k=0$ имеет корни $x_1=0$, $x_2=-1$. Получаем, что при $k\in(-\infty;-0,5)$ уравнение $2x^2(x+1)=kx$ имеет 1 корень, при $k=-0,5$ или $k=0$ уравнение имеет два корня. При $k\in(-0,5;0)\cup(0;+\infty)$ уравнение имеет три корня.

Ответ.
При $k\in(-\infty;-0,5)$ – 1 корень,
при $k\in\{-0,5;0\}$ – 2 корня,
при $k\in(-0,5;0)\cup(0;+\infty)$ – 3 три корня.

14. *(6 баллов)* Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 110080. Найдите все такие числа.

Решение. Так как $100^2<110080<1000^2$, данное число является трехзначным. Обозначим его $\overline{abc}$. Тогда $\overline{abc}\cdot\overline{cba}=110080$. Произведение ac должно заканчиваться на 0, значит, одна из цифр равна 5, а другая – четная, отличная от 0. Пусть $a=5$. Если $c\geqslant 4$, то произведение $\overline{abc}\cdot\overline{cba}$ не меньше $500\cdot 400=200000>110080$, значит, остается единственный возможный случай $c=2$. Тогда $(500+10b+2)(200+10b+5)=(502+10b)(205+10b)=100b^2+7070b+102910$, что равно 110080. Получаем уравнение $100b^2+7070b-7170=0\Leftrightarrow 10b^2+707b-717=0$, корнями этого уравнения являются числа 1 и $-71,7$. Второе число не подходит, так как b – цифра. Получаем, что исходное трехзначное число равно 512. При перестановке его цифр получится число 215, которое тоже подходит.

Ответ. 512, 215.

СУНЦ УрФУ, 2018 год
Решения вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 МИ, ФМ, ФХ классы
Вариант 2

Часть 1

1. *(2 балла)* Ученик купил четыре книги. Все книги без первой стоят 420 руб, без второй – 400 руб, без третьей – 380 руб, без четвертой – 360 руб. Сколько стоит самая дорогая книга?

Решение. Пусть x, y, z, t руб – стоимости первой, второй, третьей и четвертой книг соответственно. Тогда
$x + y + z + t - x = 420,$
$x + y + z + t - y = 400,$
$x + y + z + t - z = 380,$
$x + y + z + t - t = 360.$
Так как 360 – наименьшая из четырех разностей, то четвертая книга самая дорогая. Найдем t:
$(y + z + t) + (x + z + t) + (x + y + t) + (x + y + z) - 3(x + y + z) = 420 + 400 + 380 + 360 - 3 \cdot 360,$
$3t = 480,\ t = 160.$

Ответ. 160 руб.

2. *(2 балла)* Графики функций $y = (x+1)^4$ и $y = (x-5)^4$ проходят через точку $P(x_0, y_0)$. Найдите координаты точки P.

Решение. Найдем x_0, решив уравнение $(x+1)^4 = (x-5)^4$: $|x+1| = |x-5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = x - 5, \\ x + 1 = -x + 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $x = 2$. Подставим найденное значение x: $y = (2 + 1)^4 = 81$.

Ответ. $(2, 81)$.

3. *(2 балла)* Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения $5x^2 - 16x + q = 0$, причем $3x_1 + 5x_2 = 12$. Найдите q.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{16}{5}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{5}$. Тогда $3 \cdot \frac{16}{5} + 2x_2 = 12$, откуда $x_2 = \frac{6}{5}$, значит, $x_1 = 2$ и $q = 5 \cdot \frac{6}{5} \cdot 2 = 12$.

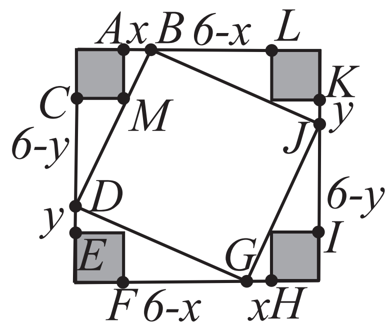
Ответ. 12.

4. *(3 балла)* Решите систему неравенств $\begin{cases} |2x + 5| \geqslant |7 - 4x|, \\ x^2 + 2x - 8 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение. Решим первое неравенство: $|2x + 5| \geqslant |7 - 4x| \Leftrightarrow (2x + 5)^2 \geqslant (7 - 4x)^2 \Leftrightarrow$
$(2x+5+4x-7)(2x+5-4x+7) \geqslant 0 \Leftrightarrow (6x-2)(2x-12) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; 6\right]$. Решив второе неравенство, получим $x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. Пересекая это множество с $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$, получим $x \in [2; 6]$.

Ответ. $x \in [2; 6]$.

5. *(3 балла)* Маша очень любит математику и квадратные торты. Специально к Машиному дню рождения Лев испек большой квадратный торт 10×10 сантиметров (толщиной торта пренебречь). Торт выдался настолько прекрасным, что Лев не удержался и откусил 4 угловых куска торта, размером 2×2 сантиметра каждый, как это показано на рисунке. Теперь Лев хочет вырезать из оставшейся части квадратный кусок максимально возможной площади и подарить его Маше. Найдите площадь куска (в сантиметрах квадратных), который достанется Маше.



Решение. Пусть $BJGD$ – искомый кусок торта. Обозначим $AB = x$, $ED = y$, тогда $BL = FG = 6 - x$, $GH = x$, $KJ = y$, $CD = JI = 6 - y$. Поскольку $BJGD$ – квадрат, получаем $(2+x)^2 + (8-y)^2 = DB^2 = DG^2 = (y+2)^2 + (8-x)^2 \Leftrightarrow 4x - 16y = 4y - 16x$, $x = y$. Чтобы площадь вырезаемого куска была наибольшей, необходимо, чтобы вершины откушенных квадратных кусков лежали на сторонах вырезаемого квадрата. Тогда из подобия треугольников ABM и CMD получаем $\frac{2}{6-x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x(6 - x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$, корень с минусом подходит (под условие $x \in [0; 6]$). Нам надо найти площадь квадрата, которая равна $DB^2 = (2 + x)^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 12x + 68 = 2(x^2 - 6x + 4) + 60 = 60.$

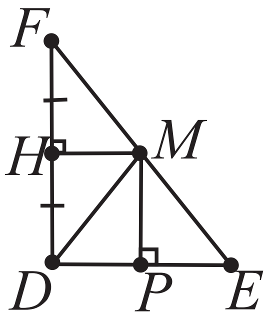
Ответ. 60.

6. *(3 балла)* Первое число составляет 80% от третьего, а второе число – 30% от третьего. Найдите эти числа, если их среднее арифметическое равно 21,21.

Решение. Пусть m, n, k – данные числа, тогда $m = 0,8k$, $n = 0,3k$, $m + n + k = 21,21 \cdot 3 \Leftrightarrow 2,1k = 21,21 \cdot 3 \Leftrightarrow k = 30,3$, $m = 24,24$, $n = 9,09$.

Ответ. $30,3$; $24,24$; $9,09$.

7. *(3 балла)* Точка M середина стороны EF треугольнике DEF со сторонами $DE = 5$, $DF = 12$, $EF = 13$. Найдите радиусы окружностей, вписанных в треугольники MED и FMD.



Решение. $\triangle DEF$ – прямоугольный, так как $EF^2 = DE^2 + DF^2$, тогда $DM = \frac{EF}{2} = 6,5 = EM = MF$. Пусть P – середина DE, тогда медиана MP в равнобедренном треугольнике DEM является высотой, поэтому $MP = \sqrt{EM^2 - \frac{DE^2}{4}} = \sqrt{42,25 - 6,25} = 6$, тогда радиус вписанной окружности треугольника DEM равен $\frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DE \cdot PM}{\frac{1}{2}(DE+2EM)} = \frac{6 \cdot 5}{5+13} = \frac{5}{3}$. Аналогично в треугольнике DMF: $MH = \sqrt{42,25 - 36} = 2,5$, радиус вписанной окружности равен $\frac{MH \cdot DF}{DF+2MF} = \frac{12 \cdot 2,5}{12+13} = \frac{6}{5}$.

Ответ. $\frac{5}{3}$ и $\frac{6}{5}$.

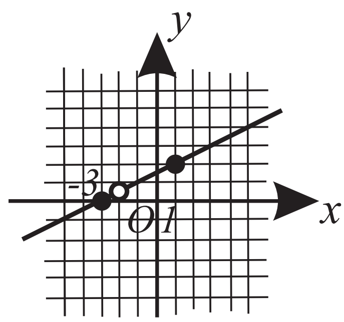
8. *(2 балла)* На дверях двух комнат висят таблички, причем на одной из них написана правда, а на другой – ложь. Надпись на двери первой комнаты гласит: «В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр». На двери второй комнаты висит табличка со словами: «В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того, в одной из комнат сидит тигр». За какой же дверью сидит принцесса?

Решение. Пусть на двери первой комнаты верная надпись, тогда в другой комнате должен сидеть тигр, но тогда надпись на второй двери тоже истинна, что невозможно. Пусть на второй двери написана правда, тогда на первой – ложь. Поскольку тигр и принцесса не могут сидеть одновременно в одной комнате, то принцесса сидит во второй комнате.

Ответ. Во второй.

9. *(3 балла)* На рисунке справа постройте график функции
$y = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{4 + 2x}$.

Решение. Разложив числитель дроби на множители, получаем $y = \frac{(x+2)(x+3)}{2(2+x)}$, $y = \frac{x+3}{2}$, $x \neq -2$. Точка с координатам $(-2, 0,5)$ на графике прямой $y = \frac{x+3}{2}$ выколотая.



Часть 2

10. *(4 балла)* Найдите все пары (x, y) целых чисел x и y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ x^2 \leqslant 25. \end{cases}$$

Решение. Разложив на простые множители 7875 и 1701, получим $5^3 \cdot 63 \cdot x^3 = 63 \cdot 3^3 \cdot y^3$, откуда $5x = 3y$. Правая часть полученного равенства делится на 3, значит, левая часть тоже должна делиться на 3, т.е. $x \vdots 3$, с учетом условия $x^2 \leqslant 25 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$, находим, что $x \in \{-3, 0, 3\}$. При $x = -3$, $y = -5$. При $x = 0$, $y = 0$. При $x = 3$, $y = 5$.

Ответ. $(-3, -5)$; $(0, 0)$; $(3, 5)$.

11. *(5 баллов)* Упростите до численного значения выражение

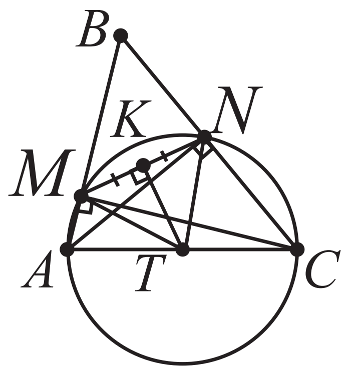
$$\frac{5\sqrt{7}\sqrt{a} + 5\sqrt{2}\sqrt{b}}{6\sqrt{7}\sqrt{a} - 6\sqrt{2}\sqrt{b}} : \frac{7a - 2b}{21a + 6b - 6\sqrt{14ab}}.$$

Решение. $\frac{5\sqrt{7}\sqrt{a}+5\sqrt{2}\sqrt{b}}{6\sqrt{7}\sqrt{a}-6\sqrt{2}\sqrt{b}} : \frac{7a-2b}{21a+6b-6\sqrt{14ab}} = \frac{5(\sqrt{7}\sqrt{a}+\sqrt{2}\sqrt{b})}{6(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{2}\sqrt{b})} \cdot \frac{21a+6b-6\sqrt{14ab}}{7a-2b} =$

$= \frac{5(\sqrt{7}\sqrt{a}+\sqrt{2}\sqrt{b})}{6(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{2}\sqrt{b})} \cdot \frac{3(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{2}\sqrt{b})^2}{(\sqrt{7}\sqrt{a}+\sqrt{2}\sqrt{b})(\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{2}\sqrt{b})} = 2,5.$

Ответ. $2,5$.

12. *(6 баллов)* В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AN и CM. Найдите расстояние между серединой стороны AC и серединой отрезка MN, если известно, что $AC = 20$, $MN = 12$.



Решение. Так как $\angle ANC = \angle AMC = 90^\circ$, точки A, N, M, C лежат на окружности с диаметром AC. Центром этой окружности является точка T, середина AC. Тогда $TN = TM = \frac{AC}{2} = 10$, кроме того, $KN = \frac{NM}{2} = 6$, где K – середина хорды NM. Треугольник NMT равнобедренный, значит, медиана TK является в нем высотой и $TK = \sqrt{TN^2 - NK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Ответ. 8.

13. *(6 баллов)* Сколько корней имеет уравнение $3x(x-1)^2 = kx$ в зависимости от значения параметра k?

Решение. Заметим, что количество корней уравнения совпадает с количеством решений совокупности $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 3(x-1)^2 = k. \end{array}\right.$ Уравнение $3(x-1)^2 = k$ не имеет корней при $k < 0$. При $k = 0$ это уравнение имеет один корень $x = 1$, отличный от 0. При $k > 0$ это уравнение имеет 2 различных корня. Найдем, при каких значениях k уравнение $3(x-1)^2 = k$ имеет два корня, один из которых равен 0. Подставим $x = 0$, получим $k = 3$. Итак, при $k = 3$ уравнение $(x-1)^2 = 1$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Получаем, что при $k \in (-\infty; 0)$ уравнение $3x(x-1)^2 = kx$ имеет 1 корень, при $k = 0$ или $k = 3$ уравнение имеет два корня. При $k \in (0; 3) \cup (3; +\infty)$ уравнение имеет три корня.

Ответ.
При $k \in (-\infty; 0)$ – 1 корень,
при $k \in \{0; 3\}$ – 2 корня,
при $k \in (0; 3) \cup (3; +\infty)$ – 3 три корня.

14. *(6 баллов)* Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 272650. Найдите все такие числа.

Решение. Так как $100^2 < 272650 < 1000^2$, данное число является трехзначным. Обозначим его $\overline{abc}$. Тогда $\overline{abc} \cdot \overline{cba} = 272650$. Произведение ac должно заканчиваться на 0, значит, одна из цифр равна 5, а другая – четная, отличная от 0. Пусть $a = 5$. Если $c \geqslant 6$, то произведение $\overline{abc} \cdot \overline{cba}$ не меньше $500 \cdot 600 = 300000 > 272650$. Если $c = 2$, то произведение $\overline{abc} \cdot \overline{cba}$ не больше произведения $592 \cdot 295 = 174640 < 272650$, значит, единственный возможный случай $c = 4$. Тогда

$$(500 + 10b + 4)(400 + 10b + 5) = (504 + 10b)(405 + 10b) = 100b^2 + 9090b + 204120,$$

что равно 272650. Получаем уравнение $100b^2 + 9090b - 68530 = 0 \Leftrightarrow 10b^2 + 909b - 6853 = 0$, корнями этого уравнения являются числа 7 и $-97,9$. Второе число не подходит, так как b – цифра. Получаем, что исходное трехзначное число равно 574. При перестановке его цифр получится число 475, которое тоже подходит.

Ответ. 574, 475.

Критерии оценивания

1., **3.**, **8.** *2 балла.*

2. *2 балла.* За каждую верную координату – 1 балл.

4. *3 балла.* Ответ отличается от верного конечным числом точек – 2 балла. Ответ является объединением верного отрезка и луча/отрезка – 1 балл.

5. *3 балла.* Ответ принадлежит $[12,5; 15)$ (или $[50; 60)$) – 1 балл.

6. *3 балла.* За каждое число – 1 балл.

7. *3 балла.* За один верно найденный радиус – 2 балла.

9. *3 балла.* Верная прямая – 2 балла, выколотая точка с абсциссой 1 (или -2) на прямой (возможно, неверной) – 1 балл.

10. *4 балла.* Разложение числовых коэффициентов на множители – 1 балл. За каждую пару чисел – 1 балл.

11. *5 баллов.* Используется формула разности квадратов для $7a - 3b$ (или $7a - 2b$) – 2 балла. Знаменатель второй дроби преобразован в квадрат разности – 2 балла. Верный ответ – 1 балл. Арифметическая ошибка – (-1) балл.

12. *6 баллов.* Найден вписанный четырехугольник (4 точки на одной окружности) – 2 балла. Подобие исходного треугольника и EH_1H_2 (или BMN) – 1 балл. Медианы в прямоугольном треугольнике – по 1 баллу за каждую. Доказано, что треугольник NH_1H_2 (или TMN) равнобедренный – 2 балла. Используется факт о медиане в равнобедренном треугольнике – 1 балл. Применение теоремы Пифагора для получения ответа – 1 балл.

13. *6 баллов.* Отмечено, что 0 является корнем – 1 балл. Найден дискриминант квадратного уравнения – 1 балл. Указаны три случая количества корней квадратного уравнения (в зависимости от k) – по 1 баллу за каждый случай. Учтено, что 0 может быть корнем квадратного уравнения – 1 балл.

14. *6 баллов.* Доказано, что число трехзначное – 1 балл. Показано, что последняя цифра числа равна 5, а первая цифра числа четная – 1 балл. Для первой цифры, равной 2 (или 4 для 2 варианта). Найден верный ответ – 1 балл. Указан второй ответ – 1 балл. Обосновано, почему первая цифра должна быть равна 2 (или 4 для 2 варианта) – 2 балла.

Ответы, 1 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
7	$(-1, 16)$	16	$[1; 2]$	15	$42,84$; $61,2$; $30,6$	$4/3$; $3/2$	Во второй	См. решения

10	**11**	**12**	**13**	**14**
$(-7, -5)$, $(0, 0)$, $(7, 5)$	$4,5$	12	$k < -0,5 \Rightarrow 1$; $k = -0,5$, $k = 0 \Rightarrow 2$; иначе $\Rightarrow 3$	512, 215

Ответы, 2 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
160	$(2, 81)$	12	$[2; 6]$	60	$30,3$; $24,24$; $9,09$	$5/3$, $6/5$	Во второй	См. решения

10	**11**	**12**	**13**	**14**
$(-3, -5)$, $(0, 0)$, $(3, 5)$	$2,5$	8	$k < 0 \Rightarrow 1$; $k = 0$, $k = 3 \Rightarrow 2$; иначе $\Rightarrow 3$	574, 475