СУНЦ УрФУ

Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 8 класс

Вариант 1

Часть 1

1. *(2 балла)* Дровосеки рубили лес. Сначала они вырубили пятую часть леса, затем вдвое больше, а потом вырубили треть того, что осталось. Какую часть леса вырубили дровосеки?

Ответ: $\frac{11}{15}$.

Решение: Дровосеки за первые два раза вырубили $\frac{3}{5}$ леса, следовательно, потом они вырубили $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$. Всего они вырубили $\frac{3}{5} + \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$.

2. *(2 балла)* Ваня написал число 531, после чего Паша приписал одну цифру слева и одну цифру справа так, что получившееся число делится на 72. Какое число получилось у Паши?

Ответ: 75312.

Решение: Чтобы число делилось на 72, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8 и 9. Число делится на 8 тогда и только тогда, когда последние три цифры этого числа образуют число, делящееся на 8. Среди чисел от 310 до 319 только 312 делится на 8. Следовательно, Паша приписал справа цифру 2. Чтобы полученное число делилось на 9, сумма его цифр должна делиться на 9. Если Паша приписал слева цифру x, то сумма цифр равна $x + 5 + 3 + 1 + 2 = x + 11$. Значит, $x = 7$.

3. *(2 балла)* Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем $AB = 4$ см, $BC = 7$ см. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: 11 и 3.

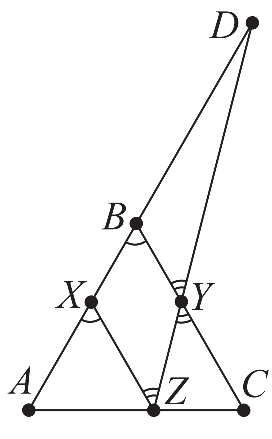
Решение: Рассмотрим возможные варианты расположения точек на прямой. Если точка A лежит между B и C, то $AC = BC - AB = 7 - 4 = 3$ см. Если точка B лежит между A и C, то $AC = AB + BC = 7 + 4 = 11$ см. Точка C лежать между A и B не может, так как $BC > AB$.

4. *(2 балла)* Вычислите: $\dfrac{(15 \cdot 3^8 - 9^5) \cdot 343}{4 \cdot 63^4}$.

Ответ: $\dfrac{3}{14}$.

Решение: $\dfrac{(15 \cdot 3^8 - 9^5) \cdot 343}{4 \cdot 63^4} = \dfrac{(5 \cdot 3^9 - 3^{10}) \cdot 7^3}{4 \cdot 7^4 \cdot 9^4} = \dfrac{3^9 \cdot (5 - 3) \cdot 7^3}{4 \cdot 7^4 \cdot 3^8} = \dfrac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} = \dfrac{3}{14}$.

5. *(2 балла)* В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты точки X, Y и Z соответственно. Известно, что $\angle AXZ = 52°$, $\angle ZYC = 51°$, $\angle ABC = 52°$. Найдите $\angle XZY$ и угол между прямыми BX и YZ.



Ответ: $51°$ и $1°$.

Решение: По условию $\angle AXZ = 52° = \angle ABC$. Это соответственные углы при пересечении прямых XZ и BC секущей AB. Значит, $(XZ) \| (BC)$. Тогда $\angle XZY = \angle ZYC$ как накрест лежащие углы при пересечении прямых XZ и BC секущей ZY. Следовательно, $\angle XZY = 51°$.

Пусть прямые BX и YZ пересекаются в точке D (эти прямые не могут быть параллельными, поскольку углы ABC и ZYC различны по величине). Тогда угол ABC является внешним углом треугольника BDY и равен сумме углов BYD и BDY. Значит, $\angle BDY = \angle ABC - \angle BYD = 52° - 51° = 1°$.

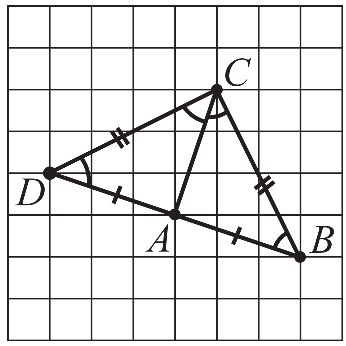
6. *(2 балла)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x - 2y = 10, \\ 4x + 6y = -28. \end{cases}$

Ответ: $x = \frac{2}{13}, y = -\frac{62}{13}$.

Решение: Умножим обе части первого уравнения на 3 и сложим со вторым уравнением, получим уравнение $13x = 2$. Значит, $x = \frac{2}{13}$. Выразим y из первого уравнения и подставим $x = \frac{2}{13}$. Тогда $y = \dfrac{3x - 10}{2} = \dfrac{3 \cdot \frac{2}{13} - 10}{2} = -\dfrac{62}{13}$.

7. *(2 балла)* На клетчатой бумаге изображен треугольник ABC. Найдите величину угла ABC.

Ответ: 45°.



Решение: На луче BA отложим отрезок AD, равный отрезку AB. Тогда $\triangle ABC = \triangle ACD$ по трем сторонам. Заметим, что эти треугольники являются равнобедренными. Значит, $\angle ADC = \angle DCA = = \angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Рассмотрим теперь треугольник DBC, сумма его углов $\angle DBC + \angle CDB + \angle BCD = 4\alpha = 180^\circ$. Откуда $\alpha = 45^\circ$.

8. *(2 балла)* В 8 "Я" классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет 24% двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25%. Какой процент двоечников в 8 "Я" сейчас?

Ответ: 28%.

Решение: Пусть сейчас в классе x учеников. По условию $0,24x = 0,25(x-1)$, то есть $0,01x = 0,25$. Значит, $x = 25$. Один человек составляет 4% от 25, поэтому сейчас в классе $24+4 = 28\%$ двоечников.

9. *(2 балла)* Петя хочет найти такие числа h и t, чтобы график функции $y = hx + t$ не проходил через четвертую четверть. Ваня предлагает ему взять отрицательное h и положительное t, Дима предлагает взять положительное h и отрицательное t, а Таня предлагает взять и h и t положительными. Кто из них прав?

Ответ: Таня.

Решение: Ясно, что h должно быть положительным. Заметим, что точка с координатами $(0;t)$ лежит на прямой и не может лежать ниже оси абсцисс, следовательно, t должно быть положительным.

10. *(2 балла)* В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом ABC равным 30° провели высоту AH. Найдите ее длину, если $BC = 6$.

Ответ: 3.

Решение: Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $AB = BC = 6$. Поскольку треугольник AHB прямоугольный и $\angle ABH = 30^\circ$, $AH = \frac{1}{2}AB = 3$.

Часть 2

11. *(7 баллов)* Упростите выражение $\dfrac{(x^3-27)^2-(2x-7)(x^2+3x+9)^2}{(x-4)(x^2+3x+9)}$.

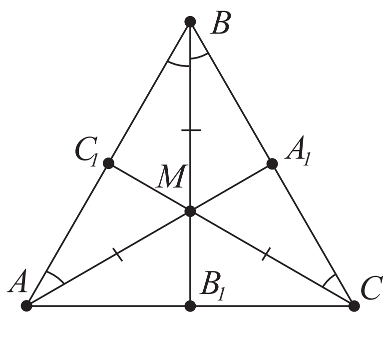
Ответ: $(x^2+3x+9)(x-4)$.

Решение: $\dfrac{(x^3-27)^2-(2x-7)(x^2+3x+9)^2}{(x-4)(x^2+3x+9)} = \dfrac{(x-3)^2(x^2+3x+9)^2-(2x-7)(x^2+3x+9)^2}{(x-4)(x^2+3x+9)} =$

$= \dfrac{(x^2+3x+9)(x^2-6x+9-2x+7)}{x-4} = \dfrac{(x^2+3x+9)(x^2-8x+16)}{x-4} = \dfrac{(x^2+3x+9)(x-4)^2}{x-4} =$

$= (x^2+3x+9)(x-4)$.

12. *(7 баллов)* В треугольника ABC медианы пересекаются в точке M. Известно, что выполняются равенства $\angle MAB = \angle MBA$ и $\angle MCB = \angle MBC$.



a) Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.

b) Найдите угол BAC.

Ответ: 60°.

Решение:

a) По условию, $\angle MAB = \angle MBA$. Значит, треугольник AMB – равнобедренный и $MB = MA$. Из условия, что $\angle MCB = \angle MBC$, получаем равенство $MB = MC$. Таким образом, $MB = MA = MC$ и, значит, треугольник AMC – равнобедренный.

b) По доказанному в пункте a) треугольник AMB — равнобедренный. Тогда его медиана MC_1 является и высотой. Значит, в треугольнике ABC отрезок CC_1 также является медианой и высотой. Это означает, что $AC = BC$. Далее рассмотрим треугольник BMC. Аналогично рассуждая, получаем, что $AC = AB$. Следовательно, $\triangle ABC$ – равносторонний, то есть все его углы, включая $\angle BAC$, равны 60°.

13. *(7 баллов)* Решите уравнение: $1 + 1 : (1 + 1 : (1 + 1 : (x + 30))) = (1,25)^2$.

<u>Ответ:</u> $-26,5$.

Решение: Уравнение можно записать в виде: $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+30}}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2$. Оно равносильно уравнению $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+30}}} = \dfrac{9}{16}$. Это означает, что $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+30}} = \dfrac{16}{9}$ или $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+30}} = \dfrac{7}{9}$. Следующим шагом получаем: $1 + \dfrac{1}{x+30} = \dfrac{9}{7}$. Тогда $\dfrac{1}{x+30} = \dfrac{2}{7}$.

Значит, $x + 30 = \dfrac{7}{2}$ и $x = \frac{7}{2} - 30 = -26,5$.

14. *(9 баллов)* Петя гордо заявил, что может найти шесть подряд идущих натуральных чисел, таких что их сумма делится на 10. Дима сказал, что может написать пять подряд идущих натуральных чисел, что их сумма делится на 10, а Сергей сказал, что невозможно найти более четырех подряд идущих натуральных чисел, чтобы их сумма делилась на 10. Кто из них прав и почему?

<u>Ответ:</u> Дима.

Решение: Докажем, что невозможно выписать 6 подряд идущих чисел, сумма которых делится на 10. Пусть наименьшее выписанное число равно n, тогда выписаны числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, их сумма равна $6n+15$ — сумма четного и нечетного числа, поэтому это число нечетно, следовательно, не может делиться на 10. Таким образом, Петя сформулировал неверное утверждение.

Дима может, например, выписать числа 2, 3, 4, 5, 6, их сумма равна 20 и делится на 10. Значит, Дима прав. Тогда утверждения Сергея также неверно. Получаем, что прав Дима.

СУНЦ УрФУ

Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 8 класс

Вариант 2

Часть 1

1. *(2 балла)* Кот Василий нашел рыбу. Сначала он съел половину, потом треть от оставшейся части, а потом еще четверть от того, что съел в первый раз. Какая часть рыбы осталась?

Ответ: $\frac{5}{24}$.

Решение: Всего кот Василий съел $\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{19}{24}$. Значит, осталось $1-\frac{19}{24}=\frac{5}{24}$.

2. *(2 балла)* Илья написал $3*71*$, после чего Саша заменил каждую звездочку на цифру (не обязательное одну и ту же) так, что получившееся число делится на 72. Какое число получилось у Саши?

Ответ: 35712.

Решение: Чтобы число делилось на 72, необходимо и достаточно чтобы оно делилось на 8 и 9. Число делится на 8 тогда и только тогда, когда последние три цифры этого числа образуют число, делящееся на 8. Среди чисел от 710 до 719 только 712 делится на 8. Следовательно, последняя цифра нашего числа — это 2.

Чтобы полученное число делилось на 9, сумма его цифр должна делиться на 9. Пусть Саша написал цифру x между тройкой и семеркой, тогда сумма цифр равна $3+x+7+1+2=x+13$. Откуда следует, что $x=5$.

3. *(2 балла)* Точки K, L, M лежат на одной прямой, причем $KL=5$ см, $LM=8$ см. Найдите длину отрезка KM.

Ответ: 13 и 3.

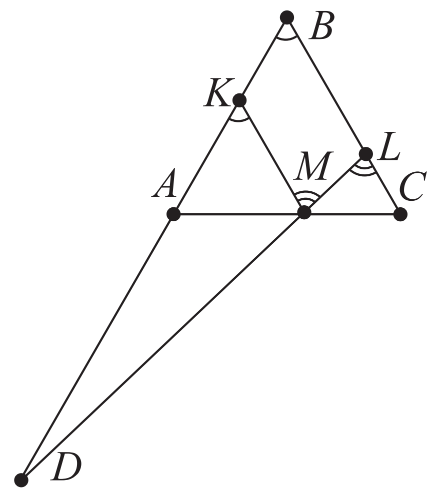
Решение: Возможны два варианта. Если точка L лежит между K и M, то $KM=KL+LM=$ $=5+8=13$ см. Если точка K лежит между L и M, то $KM=LM-KL=8-5=3$ см.

4. *(2 балла)* Вычислите: $\dfrac{(15\cdot 5^8-25^4)\cdot 256}{4\cdot 10^{10}}$.

Ответ: $\dfrac{7}{200}$.

Решение: $\dfrac{(15\cdot 5^8-25^4)\cdot 256}{4\cdot 10^{10}}=\dfrac{(15\cdot 5^8-5^8)\cdot 2^8}{2^2\cdot 2^{10}\cdot 5^{10}}=\dfrac{5^8(15-1)\cdot 2^8}{2^{12}\cdot 5^{10}}=\dfrac{14}{2^4\cdot 5^2}=\dfrac{7}{200}$.

5. *(2 балла)* В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты точки K, L и M соответственно. Известно, что $\angle AKM=$ $=32°$, $\angle MLC=33°$, $\angle ABC=32°$. Найдите $\angle KML$ и угол между прямыми BK и LM.



Ответ: $33°$ и $1°$.

Решение: По условию $\angle AKM=32°=\angle ABC$. Это соответственные углы при пересечении прямых KM и BC секущей AB. Значит, $(KM)\|(BC)$. Тогда $\angle KML=\angle MLC$ как накрест лежащие углы при пересечении прямых KM и BC секущей ML. Следовательно, $\angle KML=33°$.

Пусть прямые BK и LM пересекаются в точке D (эти прямые не могут быть параллельными, поскольку углы ABC и MLC различны по величине). Тогда $\angle KML$ является внешним углом треугольника DKM и $\angle KML=\angle DKM+\angle KDM$. Значит, $\angle KDM=$ $=\angle KML-\angle DKM=33°-32°=1°$.

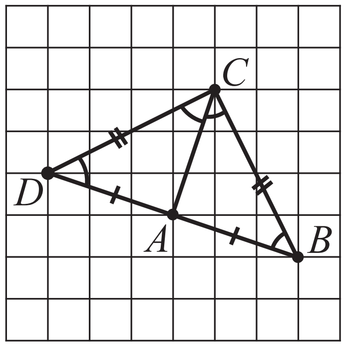
6. *(2 балла)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x+5y=7, \\ -6x+13y=21. \end{cases}$

Ответ: $x=-\frac{1}{4}, y=\frac{3}{2}$.

Решение: Умножим обе части первого уравнения на 3 и сложим со вторым уравнением, получим уравнение $28y=42$. Значит, $y=\frac{3}{2}$. Выразим x из первого уравнения и подставим $y=\frac{3}{2}$. Тогда $x=\dfrac{7-5y}{2}=\dfrac{7-5\cdot\frac{3}{2}}{2}=-\dfrac{1}{4}$.

7. *(2 балла)* На клетчатой бумаге изображен треугольник ABC. Найдите величину угла ACB.

Ответ: $45°$.



Решение: На луче BA отложим отрезок AD, равный отрезку AB. Тогда $\triangle ABC = \triangle ACD$ по трем сторонам. Заметим, что эти треугольники являются равнобедренными. Значит, $\angle ADC = \angle DCA = \angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Рассмотрим теперь треугольник DBC, сумма его углов $\angle DBC + \angle CDB + \angle BCD = 4\alpha = 180°$. Откуда $\alpha = 45°$.

8. В 8 “Ю” классе хватает двоечников, но Вовочка и Светочка учатся хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка и Светочка должны к концу четверти исправить двойки, либо их исключат. Если оба исправят двойки, то в классе будет 24% двоечников, а если Вовочку и Светочку выгонят, то двоечников станет 25%. Какой процент двоечников в 8 “Ю” сейчас?

Ответ: 28%.

Решение: Пусть сейчас в классе x учеников. По условию $0,24x = 0,25(x–2)$, то есть $0,01x = 0,5$. Значит, $x = 50$. Один человек составляет 2% от 50, поэтому сейчас в классе $24 + 2 + 2 = 28\%$ двоечников.

9. *(2 балла)* Дима хочет найти такие числа h и t, чтобы график функции $y = hx + t$ не проходил через первую четверть. Оля предлагает ему взять отрицательное h и положительное t, Маша предлагает взять отрицательное h и отрицательное t, а Надя предлагает взять и h и t положительными. Кто из них прав?

Ответ: Маша.

Решение: Ясно, что h должно быть отрицательным. Заметим, что точка $(0; t)$ лежит на прямой и должна лежать ниже оси абсцисс, следовательно, t должно быть отрицательным.

10. *(2 балла)* В равнобедренном треугольнике PQR с основанием PR высота $RT = 7$. Найдите $\angle PQR$, если $PQ = 14$.

Ответ: $30°$.

Решение: Так как треугольник PQR — равнобедренный, то $QR = PQ = 14$. Поскольку треугольник QRT прямоугольный и $RT = \frac{1}{2}QR$, $\angle PQR = 30°$.

Часть 2

11. *(7 баллов)* Упростите выражение $\dfrac{(x^3+125)^2+(2x+11)(x^2-5x+25)^2}{(x+6)(x^2-5x+25)}$.

Ответ: $(x^2-5x+25)(x+6)$.

Решение: $$\frac{(x^3+125)^2+(2x+11)(x^2-5x+25)^2}{(x+6)(x^2-5x+25)} = \frac{(x+5)^2(x^2-5x+25)^2+(2x+11)(x^2-5x+25)^2}{(x+6)(x^2-5x+25)} =$$

$$= \frac{(x^2-5x+25)(x^2+10x+25+2x+11)}{x+6} = \frac{(x^2-5x+25)(x^2+12x+36)}{x+6} = \frac{(x^2-5x+25)(x+6)^2}{x+6} =$$

$$= (x^2-5x+25)(x+6).$$

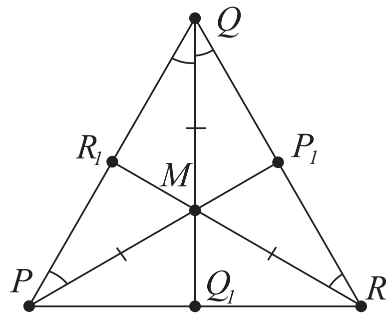
12. *(7 баллов)* В остроугольном треугольнике PQR высоты пересекаются в точке M. Известно, что $\angle MPQ = \angle MQP$ и $\angle MRQ = \angle MQR$.

a) Докажите, что треугольник PMR – равнобедренный.

b) Найдите угол PRQ.

Ответ: $60°$.

Решение:



a) По условию, $\angle MPQ = \angle MQP$. Значит, треугольник MPQ – равнобедренный и $MP = MQ$. Из условия, что $\angle MRQ = \angle MQR$, получаем равенство $MQ = MR$. Таким образом, $MP = MQ = MR$ и, значит, треугольник PMR – равнобедренный.

b) По доказанному в пункте a) треугольник PMQ – равнобедренный. Тогда его высота MR_1 является и медианой. Значит, в треугольнике ABC отрезок RR_1 также является высотой и медианой. Это означает, что $PR = RQ$. Далее рассмотрим треугольник QMR. Аналогично рассуждая, получаем, что $PR = PQ$. Следовательно, $\triangle PQR$ – равносторонний, то есть все его углы, включая $\angle PRQ$, равны $60°$.

13. *(7 баллов)* Решите уравнение: $1 + 1 : (1 + 1 : (1 + 1 : (x + 20))) = (1,2)^2$.

Ответ: $-24\frac{2}{3}$.

Решение: Уравнение можно записать в виде: $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+20}}} = \left(\dfrac{6}{5}\right)^2$. Оно равносильно уравнению $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+20}}} = \dfrac{11}{25}$. Это означает, что $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+20}} = \dfrac{25}{11}$ или $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+20}} = \dfrac{14}{11}$.

Следующим шагом получаем: $1 + \dfrac{1}{x+20} = \dfrac{11}{14}$. Тогда $\dfrac{1}{x+20} = -\dfrac{3}{14}$.

Значит, $x + 20 = -\dfrac{14}{3}$ и $x = -20 - \frac{14}{3} = -\frac{74}{3}$.

14. *(9 баллов)* Наташа гордо заявила, что может найти шесть подряд идущих натуральных чисел, таких, что их сумма делится на 6. Таня сказала, что может написать пять подряд идущих натуральных чисел, что их сумма делится на 6, а Настя сказала, что невозможно найти более четырех подряд идущих натуральных чисел, чтобы их сумма делилась на 6. Кто из них прав и почему?

Ответ: Таня.

Решение: Докажем, что невозможно выписать 6 подряд идущих чисел, сумма которых делится на 6. Пусть наименьшее выписанное число равно n, тогда выписаны числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, их сумма равна $6n+15$ — сумма четного и нечетного числа, поэтому это число нечетно, следовательно, не может делится на 6. Получаем, что Наташа сформулировала неверное утверждение.

Таня может, например, выписать числа 4, 5, 6, 7, 8, их сумма равна 30 и делится на 6. То есть Таня права. Тогда утверждение Насти является неверным.

Критерии оценивания

1. *2 балла.*
2. *2 балла.*
3. *2 балла.* За каждый верный ответ по 1 баллу.
4. *2 балла.*
5. *2 балла.* За каждый верный ответ по 1 баллу.
6. *2 балла.* За каждое верное значение переменной по 1 баллу.
7. *2 балла.*
8. *2 балла.*
9. *2 балла.*
10. *2 балла.*
11. *7 баллов.*
1 балл – верное применение формулы разности кубов;
1 балл – верное вынесение общего множителя;
1 балл – верное приведение подобных;
1 балл – верное сокращение на квадратный трехчлен;
1 балл – верное применение формулы квадрата суммы;
1 балл – верное сокращение на линейное выражение;
1 балл – получение верного ответа.
12. *7 баллов.*
2 балла – верно доказанный пункт *a*) (за каждый замеченный равнобедренный треугольник, с указанием равных сторон – *1 балл*);
5 баллов – обоснованное и верное решение пункта *b*) (*3 балла* – доказательство равнобедренности данного треугольника, *+1 балл* – доказательство того, что данный треугольник равносторонний, *+1 балл* – найден угол);
13. *7 баллов.*
1 балл – за каждое верное преобразование, ведущее к ответу.
14. *9 баллов.*
5 баллов – доказательство того, что сумма 6 подряд идущих чисел не может делиться на указанное число;
3 балла – пример для пяти подряд идущих чисел;
1 балл – обоснование того, что последнее утверждение неверно.