1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Сумма

ШИФР.

Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный экзамен по математике для поступающих в 10 ФМ, ФТ, МИ, МЭ классы 30 апреля 2018 года Вариант 1

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Дополнительной литературой, калькулятором и т.п. пользоваться нельзя. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все.

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$. (2 балла)

Решение. Кубический корень почему-то должен наводить на мысль о формуле суммы кубов. Чтобы эта формула получилась, домножим числитель и знаменатель данной дроби на неполный квадрат разности $\dfrac{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1)} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1}{2+1}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$.

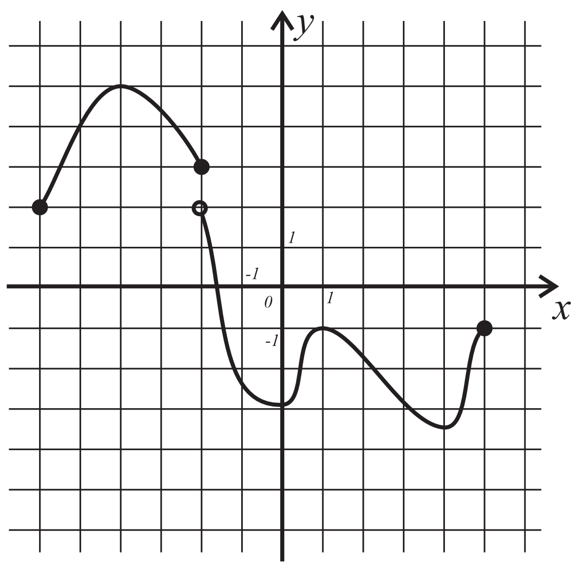
2. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9}}$. (2 балла)

Решение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательно, то есть $\dfrac{(x-2)^2}{x^2-9} \geqslant 0$. Числитель всегда неотрицателен.

Рассмотри два случая. В первом случае числитель будет равняться нулю, то есть $x=2$. При этом подкоренное выражение существует, поэтому $x=2$ входит в область определения функции.

Во втором случае числитель будет положителен, значит знаменатель тоже должен быть положительным: $x^2-9>0$. Получаем, что $x<-3$ или $x>3$.

Ответ. $(-\infty,-3)\cup\{2\}\cup(3,+\infty)$.



3. Найдите длину наибольшего промежутка убывания функции, заданной графиком. (2 балла)

Решение. У графика этой функции можно обнаружить два промежутка убывания. Первый — при $1 \leqslant x \leqslant 4$ — имеет длину 3. Второй необычен тем, что функция на нем разрывна, но это не мешает убыванию. Итак нужный нам промежуток $-4 \leqslant x \leqslant 0$ имеет длину 4.

Ответ. Длина равна 4.

4. Известно, что в арифметической прогрессии $\{a_n\}$ выполняются неравенства $-2{,}3 < a_3 < 4{,}11$ и $0 < a_5 < 5{,}3$. Найдите все возможные целые значения четвертого члена этой прогрессии. (2 балла)

Решение. Как известно поступающим в десятый класс, каждый член арифметической прогрессии равен полусумме своих соседних членов. Таким образом $a_4=\dfrac{a_3+a_5}{2}$, откуда следует двойное неравенство $-1{,}15 < a_4 < 4{,}705$. Выискиваем в этом промежутке целые значения и записываем в ответ.

Ответ. -1, 0, 1, 2, 3, 4.

5. Найдите многочлен $M(x)$, если известно, что $x^3-3x^2-2x+6=(x^2-2)\cdot M(x)$. (2 балла)

Решение. Можно, конечно, поделить с остатком. Но мы пойдем другим путем, известным еще с седьмого класса, методом разложения на множители.

$$x^3-3x^2-2x+6=(x^3-3x^2)-(2x-6)=x^2(x-3)-2(x-3)=(x^2-2)(x-3).$$

Ответ. $M(x)=x-3$.

6. Графики функций $y=ax^2$ и $y=5-x$ пересекаются в точке с координатами $(2,3)$. Найдите координаты другой точки пересечения. (2 балла)

Решение. По хорошему, надо убедиться, что точка $(2,3)$ действительно лежит на прямой $y=5-x$. После этого подставляем эти же координаты в уравнение параболы для нахождения значения параметра: $3=a\cdot 2^2$, $a=3/4$.

Теперь безо всякого параметра спокойно ищем точки пересечения параболы $y=3x^2/4$ и прямой $y=5-x$. Приравниваем $3x^2/4=5-x$, решаем квадратное уравнение, сравниваем с ответом.

Ответ. $(-10/3, 25/3)$.

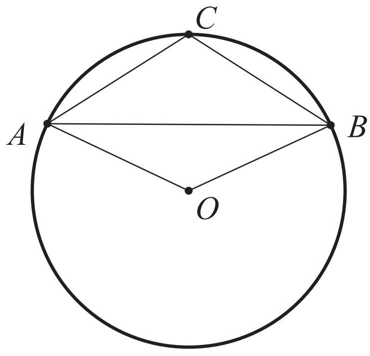
7. Найдите все значения параметра a, при которых решением системы
$\begin{cases} 4x-ay=-10, \\ x-3y=2 \end{cases}$ является пара чисел $(m,3m)$. (2 балла)

Решение. Просто подставим данное нам составителями решение в систему и получим два уравнения с двумя неизвестными a и m: $\begin{cases} 4m-3am=-10, \\ m-9m=2. \end{cases}$

Из второго уравнения найдем $m=-1/4$. Владея этим знанием, из первого уравнения найдем $a=-12$.

Ответ. $a=-12$.

8. В окружности с центром O проведены равные хорды AC и BC. Известно, что угол ACB на $75°$ больше угла CAB. Найдите угол AOB. (2 балла)



Решение. Треугольник ABC — равнобедренный, сумма углов в нем, как и во всех других треугольниках, равна $180°$. Это, вместе с условиями задачи, дает нам возможность найти его углы: $\angle ABC=35°$, $\angle ACB=110°$. Впрочем, больший угол нам без надобности. А нет, с надобностью! Надо понимать, что этот угол больше $90°$, значит центр окружности лежит вне треугольника ABC.

Переходим к свойствам углов в окружности. Угол AOB — центральный, равен градусной мере дуги, на которую опирается, то есть дуги ACB. Дуга эта состоит из двух равных кусочков, на которые опираются равные углы ABC и BAC. Они являются для окружности вписанными, поэтому равны половине дуг, на которые опираются. Маленькие дуги AC и CB равны по $70°$, а центральный угол AOB равен $140°$.

Ответ. Угол AOB равен $140°$.

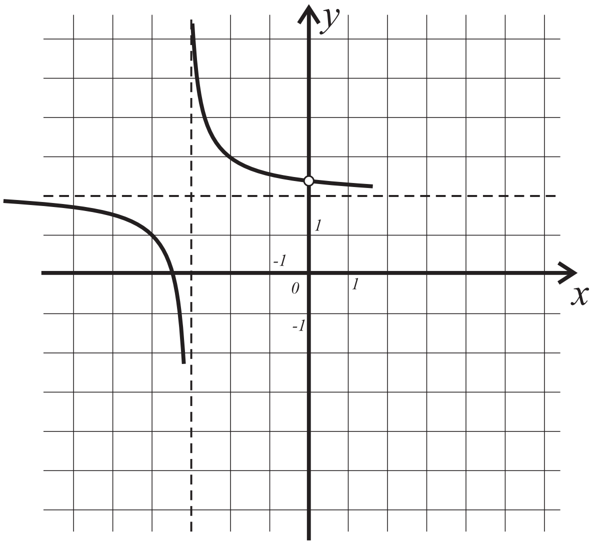
9. Даны уравнения двух прямых $2x+y+4=0$ и $x-y+5=0$. Найдите площадь треугольника ABC, где точки A и B – точки пересечения данных прямых с осью Ox, а C – точка пересечения данных прямых. (2 балла)

Решение. Пересечение с осью Ox — это когда $y = 0$. Получаем точку $(-2, 0)$ для первой прямой и $(-5, 0)$ — для второй. Для нахождения точки пересечения самих прямых необходимо решить систему из двух уравнений. Получится точка $(-3, 2)$. Из первых двух точек узнаем сторону треугольника, она равна 3. Глядя на третью вершину, узнаем высоту, она равна 2. Теперь главное не забыть поделить произведение пополам.

Ответ. 3.

10. На рисунке справа постройте график функции $y = \dfrac{2x^2 + 7x}{x^2 + 3x}$.

Укажите все значения параметра m, при которых прямая $y = m$ не пересекает график этой функции. (4 балла)



Решение. Ну, сначала область определения. Знаменатель не равен нулю, значит $x \neq 0$, $x \neq -3$.

После этого можно сократить на x и получить дробно-рациональную функцию

$$y = \frac{2x + 7}{x + 3} = 2 + \frac{1}{x + 3},$$

графиком которой является гипербола с асимптотами $x = -3$ и $y = 2$. Не забудем про “дырку” при $x = 0$.

Горизонтальная прямая $y = m$ не может встретиться с нашим графиком, если совпадает с асимптотой ($m = 2$) или проходит через “дырку” ($m = 7/3$).

Ответ. $m = 2$, $m = 7/3$.

Часть 2

К заданиям 11–15 нужно не только привести ответ, но и написать полное обоснованное решение.

11. Решите уравнение $|5x - 2| - |7x - 3| + 2x = 1$. (5 баллов)

Решение. Рассмотрим три варианта.

Вариант первый: $x < 2/5$. В этом случае оба модуля раскрываются отрицательно: $-5x + 2 + 7x - 3 + 2x = 1$. Полученное линейное уравнение имеет корень $x = 1/2$, который не удовлетворяет ограничению первого варианта. Здесь мы корней исходного уравнения не нашли.

Вариант второй: $2/5 \leqslant x < 3/7$. Да, конечно же стоит проверить, что действительно $2/5 < 3/7$. Первый модуль раскрывается теперь положительно, а второй — всё еще отрицательно: $5x - 2 + 7x - 3 + 2x = 1$. Находим $x = 3/7$, но это число как ни старается, не влезает в рассматриваемый промежуток. Опять ничего.

Вариант третий: $x \geqslant 3/7$. Наконец-то, здесь уже оба модуля раскрываются со знаком “плюс”: $5x - 2 - 7x + 3 + 2x = 1$. Ой, всё сократилось. Осталось равенство $0 = 0$, верное для всех значений рассматриваемого промежутка.

Ответ. $x \geqslant 3/7$.

12. Решите неравенство $(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x - 3} \geqslant 0$. (5 баллов)

Решение. Область допустимых значений $x \geqslant 3$.

При $x=3$ данное неравенство выполняется. Это коварный изолированный корень.

При $x>3$ неравенство можно упростить до квадратного $x^2-6x+8\geqslant 0$. Решение этого неравенства $x\leqslant 2$, $x\geqslant 4$. Учитывая ограничение, получаем только $x\geqslant 4$.

Ответ. $x=3$, $x\geqslant 4$.

13. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих условию $y^2-23=x^2$. (5 баллов)

Решение. Немного преобразуем, используя формулу разности квадратов: $(y-x)(x+y)=23$. Раз левая часть — произведение целых чисел, то и правую надо представить произведением. Число 23 — простое, но даже его можно представить в виде произведения. Например, $23\cdot 1$ или $1\cdot 23$. Более прозорливые найдут еще два варианта: $(-23)\cdot(-1)$ и $(-1)\cdot(-23)$. На этом варианты заканчиваются, а нам остается рассмотреть четыре случая.

Случай первый: $y-x=23$, $x+y=1$. Решением является пара чисел $x=-11$, $y=12$.

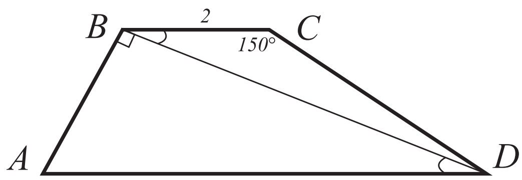
Случай второй: $y-x=1$, $x+y=23$. Решением является пара чисел $x=11$, $y=12$.

Случай третий: $y-x=-23$, $x+y=-1$. Решением является пара чисел $x=11$, $y=-12$.

Случай четвертый: $y-x=-1$, $x+y=-23$. Решением является $x=-11$, $y=-12$.

Ответ. $(11,12)$, $(11,-12)$, $(-11,12)$, $(-11,-12)$.

14. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB. Найдите длину большего основания AD, если $BC=2$, $CD=2\sqrt{3}$, $\angle BCD = 150^\circ$. (6 баллов)



Решение. Глядя на треугольник BCD, хочется найти BD по теореме косинусов:

$$BD=\sqrt{4+12-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 150^\circ}=\sqrt{28}.$$

Теперь в прямоугольном треугольнике ABD известен катет, что хорошо, но недостаточно для нахождения гипотенузы. Знать бы угол BDA, а еще лучше — его косинус... А ведь из параллельности оснований следует $\angle CBD=\angle BDA$, значит надо найти косинус угла CBD из треугольника BCD:

$$\cos\angle CBD=\frac{28+4-12}{2\cdot 2\cdot\sqrt{28}}=\frac{5}{\sqrt{28}}\Rightarrow AD=\frac{BD}{\cos\angle BDA}=\frac{BD}{\cos\angle CBD}=\frac{28}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{28}{5}$.

15. В момент, когда два бассейна были пустыми, 4 трубы одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/6$ своего объема, первую трубу переключили на заполнение второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ своего объема, еще две трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найдите отношение объемов бассейнов. (7 баллов)

Решение. Обозначим объем первого бассейна буквой P, а второго — V.

Первой стадией мы заполняем первый бассейн на шестую его часть. После этого можно переходить ко второй стадии.

На второй стадии 3 трубы заполняют первый бассейн еще на одну треть, то есть на $P/3$. Значит 1 труба заполнила параллельно второй бассейн на $1/9$ объема первого бассейна, то есть на $P/9$. Осталось соответственно заполнить первый бассейн на $P/2$, а второй — на $V-P/9$.

Итак, последний этап: оба бассейна должны наполнится одновременно. Если производительность (аналог скорости) насоса обозначить n, то время наполнения первого бассейна на этом этапе равно $\dfrac{P/2}{n}$, а время наполнения второго бассейна — $\dfrac{V-P/9}{3n}$. И эти времена равны. Приравниваем, находим отношение, пишем ответ.

Ответ. $18:29$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Сумма

ШИФР.
Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 10 ФМ, ФТ, МИ, МЭ классы
30 апреля 2018 года
Вариант 2

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Дополнительной литературой, калькулятором и т.п. пользоваться нельзя. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все.

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$. (2 балла)

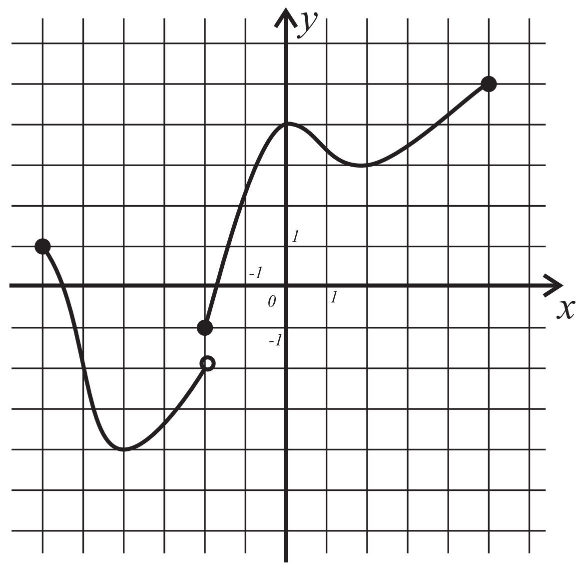
Решение. А домножим-ка мы числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы и применим формулу разности кубов: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1} = \dfrac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1)} = \dfrac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{3-1}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$.

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{16-x^2}{x^2+2x+1}}$. (2 балла)

Решение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательно, то есть $\dfrac{16-x^2}{(x+1)^2} \geqslant 0$. Знаменатель не может равняться нулю, поэтому $x \neq -1$. А если наш знаменатель не равен нулю, то он может быть только положительным, следовательно числитель обязан быть неотрицательным: $16 - x^2 \geqslant 0$. Откуда $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Не забывая про ограничение на знаменатель записываем ответ.

Ответ. $-4 \leqslant x < -1$, $-1 < x \leqslant 4$.



3. Найдите длину наибольшего промежутка возрастания функции, заданной графиком. (2 балла)

Решение. У графика этой функции можно обнаружить два промежутка возрастания. Первый — при $2 \leqslant x \leqslant 5$ — имеет длину 3. Второй необычен тем, что функция на нем разрывна, но это не мешает возрастанию. Итак нужный нам промежуток $-4 \leqslant x \leqslant 0$ имеет длину 4.

Ответ. Длина равна 4.

4. Известно, что в арифметической прогрессии $\{a_n\}$ выполняются неравенства $0 < a_5 < 5{,}18$ и $-2{,}5 < a_7 < 3{,}5$. Найдите все возможные целые значения шестого члена этой прогрессии. (2 балла)

Решение. Как известно поступающим в десятый класс, каждый член арифметической прогрессии равен полусумме своих соседей. Таким образом $a_6 = \dfrac{a_5+a_7}{2}$, откуда следует двойное неравенство $-1{,}25 < a_6 < 4{,}34$. Выискиваем в этом промежутке целые значения и записываем в ответ.

Ответ. -1, 0, 1, 2, 3, 4.

5. Найдите многочлен $M(x)$, если известно, что $x^3+2x^2+x+2=(x^2+1)\cdot M(x)$. (2 балла)

Решение. Можно, конечно, поделить с остатком. Но мы пойдем другим путем, известным еще с седьмого класса, методом разложения на множители.

$$x^3+2x^2+x+2=(x^3+x)+(2x^2+2)=x(x^2+1)+2(x^2+1)=(x^2+1)(x+2).$$

Ответ. $M(x)=x+2$.

6. Графики функций $y=ax^2$ и $y=1-2x$ пересекаются в точке с координатами $(2,-3)$. Найдите координаты другой точки пересечения. (2 балла)

Решение. А-а-а! Параметр!!! Так, без паники. Убеждаемся, что точка $(2,-3)$ действительно лежит на прямой $y=1-2x$. Подставляем эти же координаты в уравнение параболы для нахождения значения параметра: $-3=a\cdot 2^2$, $a=-3/4$. Теперь безо всякого параметра спокойно ищем точки пересечения параболы $y=-3x^2/4$ и прямой $y=1-2x$. Приравниваем $-3x^2/4=1-2x$, решаем квадратное уравнение, сравниваем с ответом.

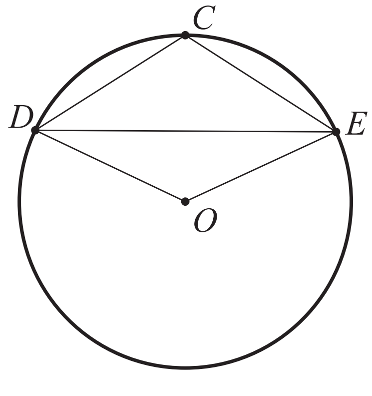
Ответ. $(2/3,-1/3)$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых решением системы
$\begin{cases} 2x-ay=6, \\ x+3y=10 \end{cases}$ является пара чисел $(2m,m)$. (2 балла)

Решение. Первая встреча с параметром уже состоялась, так что просто подставим данное нам составителями решение в систему и получим два уравнения с двумя неизвестными a и m:
$\begin{cases} 4m-am=6, \\ 2m+3m=10. \end{cases}$ Из второго уравнения найдем $m=2$. Владея знанием $m=2$, из первого уравнения найдем $a=1$.

Ответ. $a=1$.

8. В окружности с центром O проведены равные хорды CD и CE. Известно, что угол DCE на 105° больше угла CDE. Найдите угол DOE. (2 балла)



Решение. Треугольник CDE — равнобедренный, сумма углов в нем, как и во всех других треугольниках, равна 180°. Это, вместе с условиями задачи, дает нам возможность найти его углы: $\angle CDE=25^\circ$, $\angle DCE=130^\circ$. Впрочем, больший угол нам без надобности. А нет, с надобностью! Надо понимать, что он, этот угол, больше 90°, значит центр окружности лежит вне треугольника CDE.

Переходим к свойствам углов в окружности. Угол DOE — центральный, равен градусной мере дуги, на которую опирается, то есть дуги DCE. Дуга эта состоит из двух равных кусочков, на которые опираются равные углы CDE и CED. Они являются для окружности вписанными, поэтому равны половине дуг, на которые опираются. Таким образом, маленькие дуги CD и CE равны по 50°, а центральный угол DOE равен 100°.

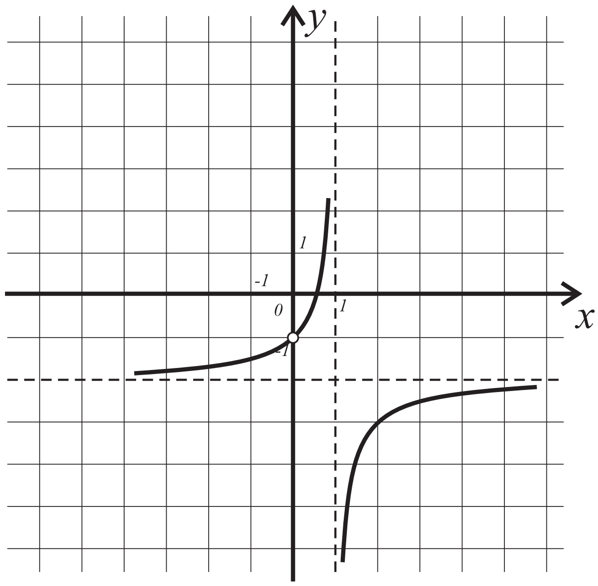
Ответ. Угол DOE равен 100°.

9. Даны уравнения двух прямых $2x+y+1=0$ и $x-y+8=0$. Найдите площадь треугольника ABC, где точки A и B — точки пересечения данных прямых с осью Ox, а C — точка пересечения данных прямых. (2 балла)

Решение. Пересечение с осью Ox — это когда $y = 0$. Получаем точку $(-1/2, 0)$ для первой прямой и $(-8, 0)$ — для второй. Для нахождения точки пересечения самих прямых необходимо решить систему из двух уравнений. Получится точка $(-3, 5)$. Из первых двух точек узнаем сторону треугольника, она равна $7{,}5$. Глядя на третью вершину, узнаем высоту, она равна 5. Теперь главное не забыть поделить произведение пополам.

Ответ. $18{,}75$.

10. Постройте график функции $y = \dfrac{x - 2x^2}{x^2 - x}$. Укажите все значения параметра m, при которых прямая $y = m$ не пересекает график этой функции. (4 балла)



Решение. Ну, сначала область определения. Знаменатель не равен нулю, значит $x \neq 0$, $x \neq 1$.

После этого можно сократить на x и получить дробно-рациональную функцию

$$y = \frac{1 - 2x}{x - 1} = -2 - \frac{1}{x - 1},$$

графиком которой является гипербола с асимптотами $x = 1$ и $y = -2$. Не забудем про “дырку” при $x = 0$.

Горизонтальная прямая $y = m$ не может встретиться с нашим графиком, если совпадает с асимптотой ($m = -2$) или проходит через “дырку” ($m = -1$).

Ответ. $m = -2$, $m = -1$.

Часть 2

К заданиям 11–15 нужно не только привести ответ, но и написать полное обоснованное решение.

11. Решите уравнение $|3x - 2| - |5x - 3| - 2x = -1$. (5 баллов)

Решение. Рассмотрим три варианта.

Вариант первый: $x > 2/3$. В этом случае оба модуля раскрываются положительно: $3x - 2 - 5x + 3 - 2x = -1$. Полученное линейное уравнение имеет корень $x = 1/2$, который не удовлетворяет ограничению первого варианта. Здесь мы корней исходного уравнения не нашли.

Вариант второй: $3/5 < x \leqslant 2/3$. Да, стоит проверить, что действительно $3/5 < 2/3$. Если для второго модуля ничего не поменялось, то подмодульное выражение первого сменило знак и нам велело: $-3x + 2 - 5x + 3 - 2x = -1$. Находим $x = 3/5$, но это число как ни старается, не влезает в рассматриваемый промежуток. Опять ничего.

Вариант третий: $x \leqslant 3/5$. Здесь оба модуля раскрываются со знаком “минус”: $-3x + 2 + 5x - 3 - 2x = -1$. Ой, всё сократилось. Осталось равенство $0 = 0$, верное для всех значений рассматриваемого промежутка.

Ответ. $x \leqslant 3/5$.

12. Решите неравенство $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x + 2} \geqslant 0$. (5 баллов)

Решение. Область допустимых значений $x \geqslant -2$.

При $x=-2$ данное неравенство выполняется. Это коварный изолированный корень.

При $x>-2$ неравенство можно упростить до квадратного $x^2+4x+3\geqslant 0$. Решение этого неравенства $x\leqslant -3$, $x\geqslant -1$. Учитывая ограничение, получаем только $x\geqslant -1$.

Ответ. $x=-2$, $x\geqslant -1$.

13. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих условию $x^2-47=y^2$. (5 баллов)

Решение. Немного преобразуем, используя формулу разности квадратов: $(x-y)(x+y)=47$. Раз левая часть — произведение целых чисел, то и правую надо представить произведением. Число 47 — простое, но даже его можно представить в виде произведения. Например, $47\cdot 1$ или $1\cdot 47$. Более прозорливые найдут еще два варианта: $(-47)\cdot(-1)$ и $(-1)\cdot(-47)$. На этом варианты заканчиваются, а нам остается рассмотреть четыре случая.

Случай первый: $x-y=47$, $x+y=1$. Решением является пара чисел $x=24$, $y=-23$.

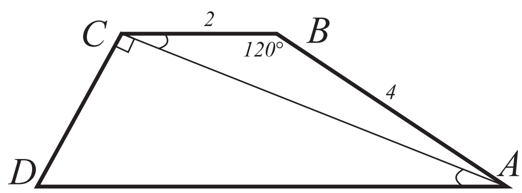
Случай второй: $x-y=1$, $x+y=47$. Решением является пара чисел $x=24$, $y=23$.

Случай третий: $x-y=-47$, $x+y=-1$. Решением является пара чисел $x=-24$, $y=23$.

Случай четвертый: $x-y=-1$, $x+y=-47$. Решением является пара чисел $x=-24$, $y=-23$.

Ответ. $(24,23)$, $(24,-23)$, $(-24,23)$, $(-24,-23)$.

14. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD. Найдите длину большего основания AD, если $AB=4$, $BC=2$, $\angle ABC=120^\circ$. (6 баллов)



Решение. Глядя на треугольник ABC, хочется найти AC по теореме косинусов:

$$AC=\sqrt{2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{28}.$$

Теперь в прямоугольном треугольнике ACD известен катет, что хорошо, но недостаточно для нахождения гипотенузы. Знать бы угол CAD, а еще лучше — его косинус... А ведь из параллельности оснований следует $\angle CAD=\angle ACB$, значит надо найти косинус угла ACB из треугольника ABC:

$$\cos\angle ACB=\frac{28+4-16}{2\cdot 2\cdot\sqrt{28}}=\frac{4}{\sqrt{28}}\Rightarrow AD=\frac{AC}{\cos\angle CAD}=\frac{AC}{\cos\angle ACB}=\frac{28}{4}=7.$$

Ответ. 7.

15. В момент, когда два бассейна были пустыми, 7 труб одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/4$ своего объема, три трубы переключили на заполнение второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ своего объема, еще две трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найдите отношение объемов бассейнов. (7 баллов)

Решение. Мы справимся! Обозначим объем первого бассейна буквой P, а второго — V.

Первой стадией мы заполняем первый бассейн на четверть. После этого можно переходить ко второй стадии.

На второй стадии 4 трубы заполняют первый бассейн еще на одну четверть, то есть на $P/4$. Значит 3 трубы заполнили параллельно второй бассейн на $3/16$ объема первого бассейна, то есть на $3P/16$. Осталось соответственно заполнить первый бассейн на $P/2$, а второй — на $V-3P/16$.

Итак, последний этап: оба бассейна должны наполниться одновременно. Если производительность (аналог скорости) насоса обозначить n, то время наполнения первого бассейна на этом этапе равно $\dfrac{P/2}{2n}$, а время наполнения второго бассейна — $\dfrac{V-3P/16}{5n}$. И эти времена равны. Приравниваем, находим отношение, пишем ответ.

Ответ. $16:23$.

Критерии оценивания

1, 5, 7, 9. *По 2 балла.*

2. *2 балла.* За ответ, отличающийся от верного одной точкой — 1 балл.

3. *2 балла.* За верно указанный промежуток — 1 балл.

4. *2 балла.* За верный промежуток или за потерю только одного значения — 1 балл.

6. *2 балла.* За каждую верную координату — 1 балл.

8. *2 балла.* За угол, дающий в сумме с верным 360° — 1 балл.

10. *4 балла*: за гиперболу — 1 балл, за “дырку” на гиперболе — 1 балл, за каждое значение параметра — по 1 баллу.

11. *5 баллов.*

За правильные преобразования в каждом случае раскрытия модулей — по 1 баллу.

За правильный вывод о постороннем корне — 1 балл.

За правильный вывод из уравнения $0 = 0$ — 1 балл.

В случае потери граничного значения промежутка — (-1) балл.

12. *5 баллов.*

За решение квадратного неравенства — 1 балл.

За ОДЗ — 1 балл.

За пересечение первого со вторым — 2 балла.

За изолированную точку — 1 балл.

За потерю граничной точки — (-1) балл.

13. *5 баллов.*

За разложение на множители по разности квадратов — 1 балл.

За каждое решение — по 1 баллу.

14. *6 баллов.*

За путь для нахождения диагонали — 1 балл.

За нахождение диагонали — 1 балл.

За равенство углов между диагональю и основаниями — 1 балл.

За путь нахождения тригонометрической функции угла между диагональю и основанием — 1 балл.

За нахождение тригонометрической функции угла между диагональю и основанием — 1 балл.

За нахождение основания — 1 балл.

15. *7 баллов.*

За вычисление, сколько на втором этапе налилось во второй бассейн — 3 балла.

За составление нужной пропорции/уравнения на основе третьего этапа — 2 балла.

За вычисление отношения объемов — 2 балла.

Ответы, 1 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$	$(-\infty,-3)\cup\{2\}\cup(3,+\infty)$	4	$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$	$M(x)=x-3$	$(-10/3, 25/3)$	-12

8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
140°	3	$2,\ 7/3$	$x \geqslant 3/7$	$x=3,\ x\geqslant 4$	$(11,12),\ (11,-12),\ (-11,12),\ (-11,-12)$	$\frac{28}{5}$	$\frac{18}{29}$

Ответы, 2 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$	$-4\leqslant x<-1,\ -1<x\leqslant 4$	4	$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$	$M(x)=x+2$	$(2/3, -1/3)$	1

8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
100°	18,75	$-2,\ -1$	$x\leqslant 3/5$	$x=-2,\ x\geqslant -1$	$(24,23),\ (24,-23),\ (-24,23),\ (-24,-23)$	7	$\frac{16}{23}$