Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 10 физ-хим и хим-био классы
1 мая 2018
Вариант 1

Часть 1

В заданиях 1–9 записать ответ в указанном месте. Дополнительной литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя. **Если получается несколько вариантов, нужно указать их все.** Знаки градуса и единицы измерения в ответе писать не нужно.

1. *(3 балла)* Вычислить значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2}{\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-\sqrt{1\frac{9}{16}}}$.

Решение. Раскроем скобки в числителе по формуле $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, а в знаменателе представим данные дроби в виде неправильных дробей. Получим:

$$\frac{\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2}{\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-\sqrt{1\frac{9}{16}}}=\frac{3-\sqrt{5}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}+3+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{\frac{27}{8}}-\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{6-2\sqrt{9-5}}{\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}=\frac{6-4}{\frac{1}{4}}=8.$$

Ответ: 8.

2. *(3 балла)* Решить уравнение $(x^2-6x+9)^2+2(x-3)^2=3$.

Решение. Свернув $(x-3)^4+2(x-3)^2=3$, сделаем замену $t=(x-3)^2$, $t\geqslant 0$. Получим $t^2+2t-3=0$. Корнями этого уравнения будут $t_1=-3$, $t_2=1$. Корень $t_1=-3$ — посторонний, а $t_2=1$ удовлетворяет условию $t\geqslant 0$. Сделаем обратную замену и получим

$$(x-3)^2=1\Leftrightarrow x^2-6x+9=1\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x_1=2,\ x_2=4.$$

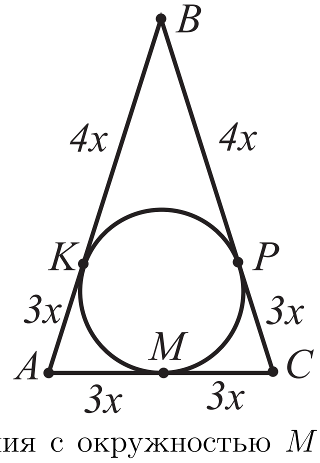
Ответ: $x=2$, $x=4$.

3. *(3 балла)* Найти значение выражения $\dfrac{144^{10}\cdot 3^{5,5}}{8^{13}\cdot 27^7\cdot\sqrt{243}}$.

Решение. Разложим на простые множители основания степеней и получим:

$$\frac{2^{40}\cdot 3^{20}\cdot 3^{5,5}}{2^{39}\cdot 3^{21}\cdot 3^{\frac{5}{2}}}=2^{40-39}\cdot 3^{20+5,5-21-2,5}=2\cdot 3^2=18.$$

Ответ: 18.



4. *(3 балла)* Основание равнобедренного треугольника равно 12 см. Боковая сторона делится точкой касания с окружностью, вписанной в этот треугольник, в отношении 4 : 3, считая от вершины треугольника. Найти периметр треугольника.

Решение. Обозначим вершины треугольника A, B, C, а точки касания с окружностью M, P, K. По условию $\frac{BP}{PC}=\frac{4}{3}$, тогда положим $BP=4x$, $PC=3x$. Зная, что отрезки касательных, проведенных из одной точки равны, получим $BK=4x$, $AK=AM=MC=3x$. Но по условию $AC=12=6x$, тогда $x=2$. Отсюда $P_{\triangle ABC}=7x+7x+6x=20\cdot 2=40$.

Ответ: 40.

5. *(3 балла)* Найти длину отрезка, который является решением системы неравенств
$$\begin{cases} x^2+2x+5>0, \\ \sqrt{2x-1}\leqslant 3. \end{cases}$$

Решение. Дискриминант уравнения $x^2+2x+5=0$ отрицательный, старший коэффициент положителен, значит неравенство $x^2+2x+5>0$ выполняется при любом действительном x. Решим второе неравенство: $\sqrt{2x-1}\leqslant 3$. ОДЗ этого неравенства $2x-1\geqslant 0$, т.е. $x\geqslant \frac{1}{2}$. Возведем неравенство $\sqrt{2x-1}\leqslant 3$ в квадрат и получим $2x-1\leqslant 9 \Leftrightarrow x\leqslant 5$. С учетом ОДЗ получаем, что решением второго неравенства является $x\in[\frac{1}{2};5]$. Учитывая, что первое неравенство выполняется при любом $x\in R$, получаем, что решением системы будут все $x\in[\frac{1}{2};5]$. Найдем длину этого промежутка: $5-\frac{1}{2}=4{,}5$.

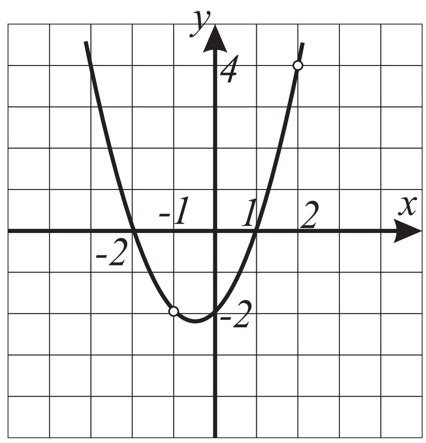
Ответ: 4,5.

6. *(3 балла)* Длину прямоугольного участка увеличили на 10%, а ширину уменьшили на какое-то число процентов. В результате площадь участка уменьшилась на 1%. На сколько процентов уменьшилась ширина участка?

Решение. Пусть a — длина и b — ширина первоначального участка, значит $S=a\cdot b$. Тогда $1,1a$ — длина нового участка, пусть ширину уменьшили на p%, новая ширина стала $b\cdot\frac{100-p}{100}$. Площадь нового участка $S_{\text{н}}=1,1ab\cdot\frac{100-p}{100}$, что составляет $0,99S$. Заменим в этом равенстве $a\cdot b$ на S и получим уравнение $0,99S=1,1S\cdot\frac{100-p}{100}$. Разделив на S и умножив на 100, получим уравнение $90=100-p$, т.е. $p=10\%$.

Ответ: 10.

7. *(3 балла)* На рисунке справа построить график функции
$$y=\frac{x^4-5x^2+4}{(x+1)(x-2)}.$$



Решение. Разложим на множители числитель $x^4-5x^2+4=$ $=(x^2-1)(x^2-4)$, получим $y=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=(x-1)(x+2)$ при условии, что $x\neq -1$; $x\neq 2$. Построим график функции $y=$ $=x^2+x-2$. Графиком является парабола без двух точек с абсциссами $x=-1$ и $x=2$. Координаты вершины параболы $x_0=-\frac{1}{2}$, $y_0=-2\frac{1}{4}$. А координаты «выколотых» точек $(-1,-2)$ и $(2,4)$.

8. *(3 балла)* Маугли попросил своих друзей обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали поровну орехов и понесли Маугли. По дороге они поссорились и каждая бросила в каждую по ореху. В результате Маугли досталось лишь 33 ореха. По скольку орехов собрали обезьяны, если известно, что каждая принесла больше одного?

Решение. Пусть было n обезьян и у каждой k орехов. Каждая обезьяна бросила $n-1$ орех, т.е. осталось $k-(n-1)$ орехов. Получаем уравнение $n\cdot(k-n+1)=33$. Ясно, что n должно быть делителем 33 (так как n и k натуральные), поэтому возможны четыре случая: $n=3$, $n=11$ и $n=33$ ($n=1$ не подходит, так как по условию обезьян было больше одной). Пусть $n=3$, тогда $3(k-3+1)=33$, $k-2=11$, $k=13$. При $n=11$ получим $11(k-11+1)=33$, $k-10=3$, $k=13$. И, наконец, при $n=33$ имеем $k-32=1$, что противоречит условию задачи.

Ответ: 13.

9. *(3 балла)* Найдите p и q , если известно, что точка $A(1,-2)$ является вершиной параболы $y=x^2+px+q$.

Решение. Найдем координаты вершины параболы $y=x^2+px+q$: $x_0=-\frac{b}{2a}\Leftrightarrow x_0=-\frac{p}{2}=1$. Отсюда $p=-2$.

Подставим координаты точки $A(1,-2)$ в уравнение $y=x^2+px+q$. Получим $-2=1^2+p+q$, тогда $q=-1$.

Ответ: $p=-2$, $q=-1$.

Часть 2

В заданиях 10–13 привести полное решение.

10. *(4 балла)* Решите уравнение $\dfrac{7x+6}{2+x}-\dfrac{3-3x}{2-x}+\dfrac{6x}{x^2-4}=x.$

Решение. ОДЗ: $x\neq 2$; $x\neq -2$. У второй дроби вынесем (-1) в знаменателе, а затем приведем все дроби к общему знаменателю $x^2-4=(x+2)(x-2)$. Получим

$$\frac{(7x+6)(x-2)}{x^2-4}+\frac{(3-3x)(x+2)}{x^2-4}+\frac{6x}{x^2-4}=\frac{x(x^2-4)}{x^2-4}.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим уравнение $x^3-4x^2+x+6=0$. Легко проверить,что $x=-1$ является его корнем. Поделим $x^3-4x^2+x+6=0$ на $x+1$. Получим в частном многочлен x^2-5x+6. Его корнями являются $x=3$ и $x=2$. Но $x=2$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x=-1$, $x=3$.

11. *(6 баллов)* Решите неравенство $x^2-|5x-9|\leqslant 5x$.

Решение. Неравенство содержит модуль, поэтому рассмотрим два случая.

Первый случай. $\begin{cases}5x-9\geqslant 0,\\ x^2-(5x-9)\leqslant 5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{9}{5},\\ x^2-10x+9\leqslant 0.\end{cases}$ Корни трехчлена второго неравенства 1 и 9, получим $(x-1)(x-9)\leqslant 0$, т.е. $1\leqslant x\leqslant 9$. Получим систему

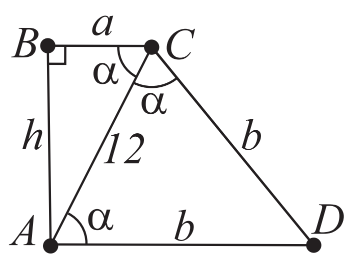
$$\begin{cases}x\geqslant\frac{9}{5},\\ 1\leqslant x\leqslant 9\end{cases}\Leftrightarrow\frac{9}{5}\leqslant x\leqslant 9.$$

Второй случай. $\begin{cases}5x-9<0,\\ x^2+(5x-9)\leqslant 5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{9}{5},\\ x^2-9\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{9}{5},\\ -3\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow -3\leqslant x<\frac{9}{5}.$

Объединим результаты двух случаев и получим ответ $-3\leqslant x\leqslant 9$.

Ответ: $[-3;9]$.

12. *(7 баллов)* В прямоугольной трапеции средняя линия равна 13,5 см. Меньшая диагональ трапеции является биссектрисой тупого угла и равна 12 см. Найти площадь трапеции.



Решение. Обозначим вершины трапеции $ABCD$ так, как указано на рисунке. Меньшая диагональ AC является биссектрисой угла C, поэтому $\angle BCA=\angle ACD=\alpha$. Поскольку прямые BC и AD параллельны, $\angle BCA=\angle CAD=\alpha$ как накрест лежащие углы. Пусть $BC=a$ и $AD=b$. Длина средней линии трапеции равна $\frac{a+b}{2}$, т.е. $a+b=27$. В треугольнике ABC: $AB=h$ — высота, $\cos\alpha=\frac{a}{12}$. В треугольнике ACD углы A и C равны α, значит $AD=CD=b$. По теореме косинусов $CD^2=AC^2+AD^2-2\cdot AC\cdot AD\cdot\cos\alpha$. Подставим b и $\cos\alpha$: $b^2=144+b^2-2\cdot 12\cdot b\cdot\frac{a}{12}$, т.е. $a\cdot b=72$. Решим систему уравнений $\begin{cases}a+b=27,\\ a\cdot b=72.\end{cases}$ Выразим $a=27-b$ и подставим $b(27-b)=72$. Получим уравнение $b^2-27b+72=0$, найдем корни $b=\frac{27\pm 21}{2}$, $b_1=24$, $b_2=3$. Соответствующие значения $a_1=3$, $a_2=24$. Основания трапеции равны 3 и 24. Найдем высоту трапеции из треугольника ABC: $AB=\sqrt{12^2-3^2}=3\sqrt{15}$. Площадь трапеции $S=\frac{BC+AD}{2}\cdot AB$, т.е. $S=\frac{3+24}{2}\cdot 3\sqrt{15}=40{,}5\sqrt{15}$.

Ответ: $40{,}5\sqrt{15}$.

13. *(6 баллов)* При каких значениях параметра a расстояние между корнями уравнения $x^2-2ax+\frac{3}{4}a^2=0$ равно 2?

Решение. Найдем корни уравнения: $x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4\cdot\frac{3}{4}a^2}}{2}=\frac{2a\pm a}{2}$. Получим $x_1=\frac{3}{2}a$, $x_2=\frac{1}{2}a$. Разность корней можно записать в виде модуля $\left|\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}a\right|=2$ (ведь мы не знаем какой из корней больше). Получаем $|a|=2$, $a=\pm 2$.

Ответ: $a=\pm 2$.

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 10 физ-хим и хим-био классы
1 мая 2018
Вариант 2

Часть 1

В заданиях 1-9 записать ответ в указанном месте. Дополнительной литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя. **Если получается несколько вариантов, нужно указать их все.** Знаки градуса и единицы измерения в ответе писать не нужно.

1. *(3 балла)* Вычислить значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2}{\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}}$.

Решение. Раскроем скобки в числителе по формуле $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, а в знаменателе представим данные дроби в виде неправильных дробей. Получим

$$\frac{4-\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}+4+\sqrt{7}}{\sqrt[4]{\frac{81}{16}}-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}}=\frac{8-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}}{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}=$$

$$=\frac{8-2\cdot\sqrt{16-7}}{\frac{1}{6}}=\frac{8-2\cdot 3}{1}\cdot\frac{6}{1}=2\cdot 6=12.$$

Ответ: 12.

2. *(3балла)* Решить уравнение $(x^2-4x+4)^2+3(x-2)^2=4$.

Решение. Заметим,что $x^2-4x+4=(x-2)^2$ и делаем замену $t=(x-2)^2$, $t\geqslant 0$. Получим $t^2+3t-4=0$. Корнями этого уравнения будут $t_1=-4$, $t_2=1$. Корень $t_1=-4$ посторонний, а $t_2=1$ удовлетворяет условию $t\geqslant 0$. Сделаем обратную замену и получим $x^2-4x+4=1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x_1=3$, $x_2=1$.

Ответ: $x=3$, $x=1$.

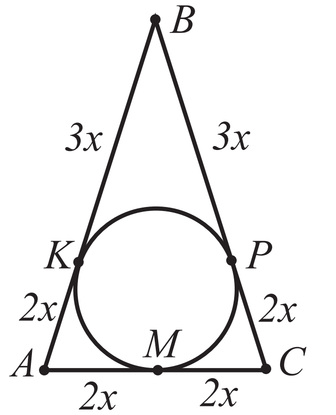
3. *(3балла)* Найти значение выражения $\dfrac{100^{11}\cdot\sqrt{125}}{8^7\cdot 25^9\cdot 5^{3,5}}$.

Решение. Разложим на простые множители основания степеней и получим:

$$\frac{(10^2)^{11}\cdot\sqrt{5^3}}{(2^3)^7\cdot(5^2)^9\cdot 5^{3,5}}=\frac{(2\cdot 5)^{22}\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{2^{21}\cdot 5^{18}\cdot 5^{3,5}}=\frac{2^{22}\cdot 5^{22}\cdot 5^{1,5}}{2^{21}\cdot 5^{18}\cdot 5^{3,5}}=\frac{2\cdot 5^4}{5^2}=2\cdot 5^2=50.$$

Ответ: 50.

4. *(3балла)* Основание равнобедренного треугольника равно 4 см. Боковая сторона делится точкой касания с окружностью, вписанной в этот треугольник, в отношении $3:2$, считая от вершины треугольника. Найти периметр треугольника.



Решение. Обозначим вершины треугольника A, B, C, а точки касания с окружностью M, P, K. По условию $\frac{BP}{PC}=\frac{3}{2}$, тогда положим $BP=3x$, $PC=2x$. Зная, что отрезки касательных, проведенных из одной точки равны, получим $BK=3x$, $AK=AM=MC=2x$. Но по условию $AC=4=4x$, тогда $x=1$. Отсюда $P_{\triangle ABC}=5x+5x+4x=14x=14\cdot 1=14$.

Ответ: 14.

5. *(3 балла)* Найти длину отрезка, который является решением системы неравенств
$\begin{cases} x^2 + x + 3 > 0, \\ \sqrt{2x-3} \leqslant 3. \end{cases}$

Решение. Дискриминант уравнения $x^2 + x + 3 = 0$ отрицательный, старший коэффициент положителен, значит неравенство выполняется при любом действительном x. Решим второе неравенство: $\sqrt{2x-3} \leqslant 3$. ОДЗ этого неравенства: $2x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1,5$. Возведем неравенство $\sqrt{2x-3} \leqslant 3$ в квадрат, получим $2x - 3 \leqslant 9 \Leftrightarrow x \leqslant 6$. С учетом ОДЗ получаем, что решением второго неравенства является отрезок $[1{,}5; 6]$. Учитывая, что первое неравенство выполняется при любом $x \in R$, получаем, что решениями системы являются $x \in [1{,}5; 6]$. Найдем длину этого промежутка: $6 - 1{,}5 = 4{,}5$.

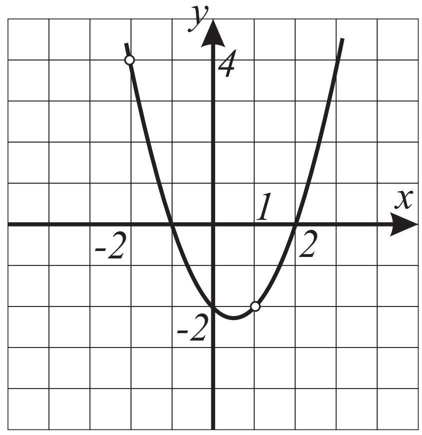
Ответ: 4,5.

6. *(3 балла)* Ваня решил купить свои любимые конфеты. Он пришел в магазин и увидел, что цена за кг увеличилась на 20%. Ему пришлось купить конфет на какое-то количество процентов меньше, при этом он заплатил на 4% меньше ожидаемого. На сколько процентов уменьшился вес покупки?

Решение. Пусть a первоначальная цена конфет, m — планируемая масса конфет, тогда $a \cdot m$ руб — планируемая сумма. Реально получилось $1{,}2a$ — новая цена конфет, а сумма покупки $0{,}96a \cdot m$, поэтому масса конфет $\frac{0{,}96am}{1{,}2a} = 0{,}8m$. Это означает, что масса купленных конфет на 20% меньше.

Ответ: 20.

7. *(3 (балла)* На рисунке справа построить график функции
$y = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x-1)(x+2)}$.



Решение. Разложим на множители числитель $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, получим $y = \dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$ при условии, что $x \neq 1$; $x \neq -2$. Построим график функции $y = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$. Графиком является парабола без двух точек с абсциссами $x = 1$ и $x = -2$. Координаты вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$; $y_0 = -2\frac{1}{4}$. А координаты «выколотых» точек $(1, -2)$ и $(-2, 4)$.

8. *(3 балла)* Девочки-одноклассницы купили поровну открыток. Затем каждая надписала и отправила по открытке всем остальным. В результате у них вместе осталось 55 чистых открыток. Сколько открыток купила каждая девочка, если известно, что у каждой из них осталось больше одной открытки?

Решение. Пусть n — количество девочек, а x — количество открыток, купленных каждой девочкой. Каждая девочка подарила по $n - 1$ открыток, а раз девочек n, то всего подписанных открыток $n \cdot (n-1)$. Тогда получаем уравнение $n \cdot x - n \cdot (n-1) = 55$; $n(x - n + 1) = 55$. Число 55 делится на 5 и на 11 (делители 1 и 55 не подходят, ведь открыток после дарения должно остаться более одной и девочек по условию тоже более одной). Пусть $n = 5$, тогда $x - n + 1 = 11$ и $x = 15$. Пусть $n = 11$, получим $x - n + 1 = 5$ и $x = 15$.

Ответ: 15.

9. *(3 балла)* Найдите k и m, если известно, что точка $A(-2, 7)$ является вершиной параболы $y = kx^2 + 8x + m$.

Решение. Найдем координаты вершины параболы $y = kx^2 + 8x + m$: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2k} = -2$, отсюда $-\frac{4}{k} = -2 \Rightarrow k = 2$. Подставим координаты точки $A(-2, 7)$ в уравнение $y = 2x^2 + 8x + m$. Получим $7 = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + m$, тогда $m = 15$.

Ответ: $k = 2$, $m = 15$.

Часть 2

В заданиях 10–13 привести полное решение.

10. *(4 балла)* Решите уравнение $\dfrac{3x+3}{3+x}-\dfrac{9-x}{3-x}-\dfrac{24+4x}{x^2-9}=x$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 3$; $x\neq -3$. У второй дроби вынесем (-1) в знаменателе, а затем приведем все дроби к общему знаменателю $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Получим

$$\frac{(3x+3)(x-3)}{x^2-9}+\frac{(9-x)(x+3)}{x^2-9}-\frac{24+4x}{x^2-9}=\frac{x\cdot(x^2-9)}{x^2-9}.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим уравнение $x^3-2x^2-5x+6=0$. Легко проверить,что $x=1$ является его корнем. Поделим x^3-2x^2-5x+6 на $x-1$. Получим в частном многочлен x^2-x-6. Его корнями являются $x=3$ и $x=-2$. Но $x=3$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x=1$, $x=-2$.

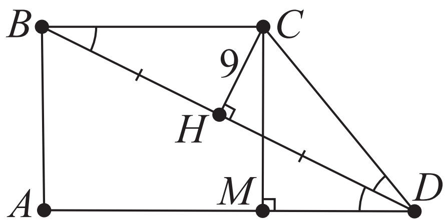
11. *(6 баллов)* Решите неравенство $x^2-|8{,}5x-16|\leqslant 8{,}5x$.

Решение. Раскроем модуль по определению и получим

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}8{,}5x-16\geqslant 0,\\ x^2-8{,}5x+16\leqslant 8{,}5x,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}8{,}5x-16<0,\\ x^2+8{,}5x-16\leqslant 8{,}5x\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant \frac{32}{17},\\ x^2-17x+16\leqslant 0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<\frac{32}{17},\\ x^2-16\leqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{32}{17}\leqslant x\leqslant 16,\\ -4\leqslant x\leqslant \frac{32}{17}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-4;16].$$

Ответ: $x\in[-4;16]$.

12. *(7 баллов)* В прямоугольной трапеции большая диагональ, равная 24 см, является биссектрисой острого угла. Найти площадь трапеции, если расстояние от вершины тупого угла до диагонали равно 9.



Решение. Обозначим вершины трапеции $ABCD$ так, как это сделано на рисунке, большую диагональ BD, а перпендикуляр к BD — буквами CH. По условию BD — биссектриса угла D, значит $\angle BDC=\angle BDA=\angle DBC$ (как накрест лежащие углы). Тогда $\triangle BCD$ – равнобедренный, а его высота CH является и медианой, следовательно $HD=12$. Найдем из $\triangle CHD$ гипотенузу $CD=BC=\sqrt{9^2+12^2}=15$. Найдем $\cos\angle CDH=\frac{HD}{CD}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$. Заметим, что $\angle D=2\angle CDH$. По формуле косинуса двойного угла найдем косинус угла D:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}.$$

Тогда $MD=CD\cdot\cos\angle D=15\cdot\frac{7}{25}=\frac{21}{5}=4,2$. Тогда $CM^2=CD^2-DM^2=15^2-(\frac{21}{5})^2$. Получаем, что $CM=\frac{72}{5}=14,4$. Вычислим площадь трапеции: $S=\frac{BC+AD}{2}\cdot CM=\frac{15+15+\frac{21}{5}}{2}\cdot\frac{72}{5}=246,24$.

Ответ: $246,24$.

13. *(6 баллов)* При каких значениях параметра a расстояние между корнями уравнения $x^2-2ax-\frac{5}{4}a^2=0$ равно 1?

Решение. Найдем корни уравнения: $x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4\cdot(-\frac{5}{4}a^2)}}{2}=\frac{2a\pm 3a}{2}$. Получим $x_1=2{,}5a$, $x_2=-0{,}5a$. Разность корней можно записать в виде модуля $|2,5a-(-0,5a)|=1$ (ведь мы не знаем какой из корней больше). Получаем $|3a|=1$; $a=\pm\frac{1}{3}$.

Ответ: $a=\pm\frac{1}{3}$.

Критерии оценивания

1. *3 балла.*
2. *3 балла.*
2 балла — найден один корень,
3 балла — найдены оба корня.
3. *3 балла.*
4. *3 балла.*
5. *3 балла.*
1 балл — за ответ $(-\infty, 5]$ (или $(-\infty, 6]$) — без учета ОДЗ,
2 балла — за правильный промежуток (с учетом ОДЗ),
3 балла — за верный ответ.
6. *3 балла.*
7. *3 балла.*
1 балл — верно построена парабола, но не «выколоты» точки,
2 балла Верно построена парабола, выколоты точки, но не указаны вершины, координаты выколотых точек и т.д.
8. *3 балла.*
9. *3 балла.*
1 балл — найден один из коэффициентов,
3 балла — найдены оба коэффициента.
10. *4 балла*
2 балла — верно приведено к общему знаменателю и получено кубическое уравнение,
$2+1$ *балл* — найдены корни, но без учета ОДЗ,
$2+1+1$ *балла* — найдены корни с учетом ОДЗ.
11. *6 баллов.*
по 3 балла — за каждый случай раскрытия модуля,
-1 *балл* — если нет ответа.
12. *7 баллов.*
1 балл — найдены накрест лежащие углы,
1 балл — указан равнобедренный треугольник,
1 балл — найдены в нем какие-то элементы,
4 балла — верно получен ответ,
-1 *балл* — за арифметическую ошибку, при правильном ходе решения.
13. *6 баллов.*
1 балл — верно найден дикриминант,
по 1 баллу — за каждый из найденных корней,
по 2 балла — за каждое верное значение параметра.

Ответы, 1 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
8	$\{2, 4\}$	18	40	4,5	10		13	$p=-2,\ q=-1$

10	**11**	**12**	**13**
$x=-1,\ x=3$	$[-3; 9]$	$40{,}5\sqrt{15}$	$a=\pm 2$

Ответы, 2 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
12	$\{1, 3\}$	50	14	4,5	20		15	$k=2,\ m=15$

10	**11**	**12**	**13**
$x=-2,\ x=1$	$[-4; 16]$	246,24	$a=\pm\frac{1}{3}$