Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 фм, фх и ми классы СУНЦ УрФУ
май 2017 года
Вариант 1

Часть B

B1. Пароход проходит по реке путь от Астрахани до Казани за 6 суток, а от Казани до Астрахани за 4 суток. За сколько суток пройдет то же расстояние плот (2 балла)?

Решение. Введем кучу неизвестных, а потом все посокращаем. Пусть p — скорость парохода в стоячей воде, r — скорость течения реки, s — неизвестное математикам расстояние между городами. Тогда, исходя из условия задачи, можно составить аж целых два уравнения: $p+r=s/4$ и $p-r=s/6$.

Переходим ко второму этапу нашего плана. В задаче требуется найти s/r — время путешествия плота. Буква p нам совсем не требуется, поэтому избавимся от нее путем вычитания из первого уравнения второго: $2r=s/12$. Откуда легко и просто $s/r=24$.

Ответ. 24 суток.

B2. Известно, что 6 является корнем квадратного трехчлена $x^2-13x+b$. Определите b и второй корень (2 балла).

Решение. Корень квадратного трехчлена при подстановке в квадратный трехчлен превращает этот квадратный трехчлен в ноль. Только поэтому получается, что $6^2-13\cdot 6+b=0$.

Из этого внезапно возникшего линейного уравнения находим $b=42$. Квадратный трехчлен чудом преобразовался в $x^2-13x+42$, его вторым корнем по теореме Виета обязано быть число 7.

Ответ. $b=42$, $x_2=7$.

B3. Вычислите $\dfrac{243^3-9^5}{243^3+9^5}:\dfrac{625^3+125^4}{625^3-125^4}$ (2 балла).

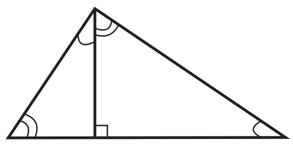
Решение. Поскольку мы знаем решение, то сразу посмотрим на знаменатель второй дроби. Нетрудно заметить, что числа в этом знаменателе делятся на 5, а при детальном рассмотрении оказываются степенями пятерки.

Итак, $625^3-125^4=(5^4)^3-(5^3)^4=5^{12}-5^{12}=0$. Стоп! Это же в знаменателе! А на ноль делить нельзя.

Ответ. Не существует (не определено, не корректно, не вычисляется и т.п.).

B4. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна $2\sqrt{3}$ и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите больший катет треугольника и медиану, проведенную к гипотенузе (2 балла).

Решение. Раз высота делит прямой угол в отношении $1:2$, то делит она его на углы в 30° и 60°. А раз, она — высота, то и в треугольнике острые углы получаются 30° и 60°. Смотрим на правый из получившихся прямоугольных треугольников: там катет длины $2\sqrt{3}$ лежит напротив угла в 30°. Значит, гипотенуза в нем в два раза больше — $4\sqrt{3}$. А она по совместительству является большим катетом исходного треугольника.



Теперь посмотрим на исходный треугольник: в нем мы уже знаем больший катет и углы. По этим данным поступающий в математический класс абитуриент легко найдет гипотенузу: $4\sqrt{3}/\cos 30^\circ = 8$. А нужная нам медиана, как известно, равна половине гипотенузы, то есть 4.

Ответ. Больший катет равен $4\sqrt{3}$. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна 4.

B5. Трехзначное число начинается с цифры 3. Если ее перенести в конец числа, то получится число, составляющее 3/4 от исходного. Найдите исходное трехзначное число (2 балла).

Решение. Обозначим количество десятков исходного числа буквой d, а количество единиц — e. Само число будет равно $300+10d+e$. Проделаем с ним указанную в задаче операцию и составим уравнение:

$$\frac{3}{4}(300+10d+e)=(100d+10e+3).$$

Так. Уравнение одно, а неизвестных — два. Но с этой проблемой мы справимся, если не забудем, что d и e — цифры. Итак, упростим наше уравнение: неизвестные перенесем вправо, известные — влево, домножим на 4 и сократим на 37. Получится $24=10d+e$. Для цифр есть только одна возможность выполнить это равенство: $d=2$, $e=4$.

Ответ. 324.

B6. Решите неравенство $(x^2+4)(x^2-4x+3)\leqslant 0$ (2 балла).

Решение. Заметим, что выражение в левой скобке всегда положительно, значит, неравенство равносильно $(x^2-4x+3)\leqslant 0$.

Решение этого квадратного неравенства — отрезок между корнями квадратного трехчлена, так как старший коэффициент положителен. А корни легко находятся по теореме Виета: $x_1=1$, $x_2=3$.

Ответ. $[1;\ 3]$.

B7. Решите систему $\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ |2x + y| = 5 \end{cases}$ (2 балла).

Решение. Если модуль равен 5, то подмодульное выражение может принимать ровно два значения: 5 или -5. Придется рассмотреть два случая.

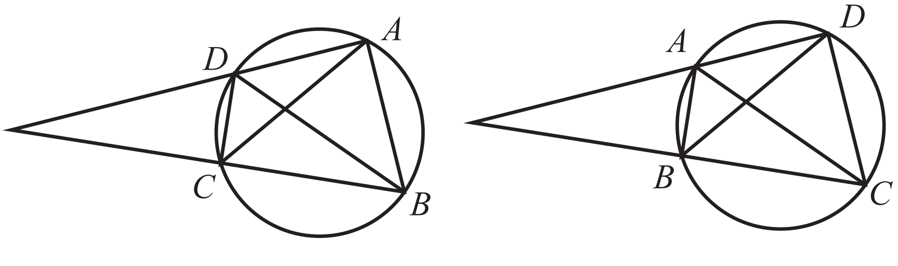
Случай первый: $2x + y = 5$. Выразим $y = 5 - 2x$ и подставим в первое уравнение: $3x^2+2x(5-2x) = 9$. Получается симпатичное квадратное уравнение $x^2 - 10x + 9 = 0$, корни которого мы найдем опять по теореме Виета: $x_1 = 1$, $x_2 = 9$. Не забудем найти для каждого x свой y: $y_1 = 3$, $y_2 = -13$.

Случай второй: $2x + y = -5$. Выразим $y = -5 - 2x$ и подставим в первое уравнение: $3x^2 + 2x(-5 - 2x) = 9$. Получается симпатичное квадратное уравнение $x^2 + 10x + 9 = 0$, корни которого мы найдем опять по теореме Виета: $x_3 = -1$, $x_4 = -9$. Не забудем найти для каждого x свой y: $y_3 = -3$, $y_4 = 13$. Кстати, второй случай можно было бы и не рассматривать, ведь если пара $(x_0,\ y_0)$ — решение системы, то решением будет также пара $(-x_0,\ -y_0)$.

Ответ. $(1,\ 3)$, $(9,\ -13)$, $(-1,\ -3)$, $(-9,\ 13)$.

B8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите угол между диагоналями, если $\angle CAD = 50^\circ$, а угол между прямыми AD и BC равен 20° (2 балла).

Решение. Нужен рисунок. Даже два, поскольку неизвестно, с какой стороны прямые пересекаются.



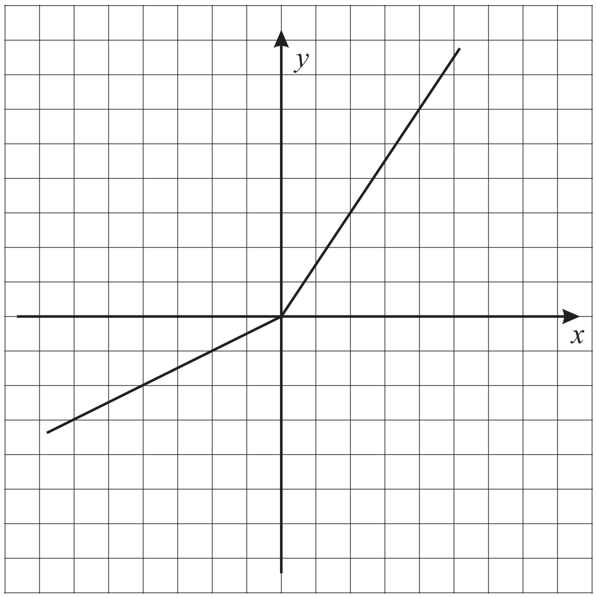
Правый рисунок. Вписанный угол CAD равен 50°, поэтому дуга CD равна 100°. Угол между секущими AD и BC равен полуразности высекаемых дуг. Знаем угол и одну дугу, значит, можем найти другую. Дуга AB равна 60°. Требуемый угол между хордами равен полусумме дуг, то есть 80°.

Левый рисунок. Вписанный угол CAD равен 50°, поэтому дуга CD равна 100°. Угол между секущими AD и BC равен полуразности высекаемых дуг. Знаем угол и одну дугу, значит, можем найти другую. Дуга AB равна 140°. Требуемый угол между хордами равен полусумме дуг, то есть 120°. Ой, это не требуемый, ведь нужен наименьший угол между прямыми, то есть 60°.

Ответ. 80° или 60°.

B9. Постройте график функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2}+2x}{2} \text{ (2 балла).}$$



Решение. Так сразу строить не будем. Сначала заметим, что $\sqrt{x^2} = |x|$.

Тогда при $x \geqslant 0$ получится $y = 3x/2$, а при $x < 0$ будет $y = x/2$.

Часть C

C1. Зная, что $a+b=4$ и $ab=2$, найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^4 + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) \text{ (8 баллов).}$$

Решение. Можно, конечно, исходя из условия, найти значения a и b, подставить их в выражение и запутаться в корнях, но мы так делать не будем.

Сначала разберемся с первым слагаемым:

$$\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^4 = \frac{(a+b)^4}{2^4\cdot(ab)^4} = \frac{4^4}{2^4\cdot 2^4} = 1.$$

Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) = \frac{(b-a)^3}{(ab)^3} : \frac{b^2-a^2}{(ab)^2} = \frac{(b-a)^3\cdot(ab)^2}{(ab)^3\cdot(b^2-a^2)} = \frac{(b-a)^3}{2(b^2-a^2)}.$$

Вспомним формулу разности квадратов и похимичим с получившимся квадратом разности:

$$\frac{(b-a)^3}{2(b^2-a^2)} = \frac{(b-a)^3}{2(b-a)(a+b)} = \frac{(b-a)^2}{2(a+b)} = \frac{a^2-2ab+b^2}{8} = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{8} =$$

$$= \frac{(a+b)^2-4ab}{8} = \frac{16-8}{8} = 1.$$

Осталось только сложить.

Ответ. 2.

C2. Производительность труда второй бригады на 25% меньше, а производительность труда третьей бригады на 25% больше, чем производительность труда первой бригады. Первая и третья бригады вместе выполняют ту же работу, что и вторая бригада. На сколько процентов время выполнения работы второй бригадой больше времени выполнения совместной работы первой и третьей бригадами (8 баллов)?

Решение. Пусть v — производительность труда первой бригады. Смело находим, что производительность труда второй бригады равна $\frac{3}{4}v$, а производительность труда третьей бригады — $\frac{5}{4}v$.

Переходим ко времени. Время — это работа, деленная на производительность. Обозначим выполняемую работу буквой s. Тогда время выполнения работы второй бригадой равно $\frac{4s}{3v}$, а время выполнения совместной работы первой и третьей бригадами равно $\frac{s}{v+\frac{5}{4}v} = \frac{4s}{9v}$.

Составляем пропорцию:

$$\frac{4s}{9v} \ - \ \text{это } 100\%,$$

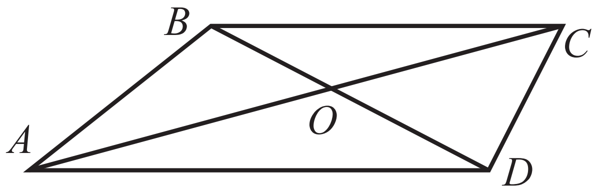
$$\frac{4s}{3v} \ - \ \text{это } x\%.$$

Откуда $x = 300\%$, то есть разница по времени равна 200%.

Ответ. На 200%.

C3. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Основания BC и AD соответственно равны 2 и 6, а площадь трапеции равна 25. Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что площадь треугольника AOD равна 9 (8 баллов).

Решение. Тут должен быть рисунок.



Посмотрим внимательно на треугольники AOB и AOD. Их стороны BO и DO лежат на одной прямой, значит высота, проведенная из их общей вершины A к этим сторонам тоже одна на двоих. А раз высота у них одна и та же, то площади относятся как стороны, к которым эта высота проведена.

Интересно, а как относятся BO и DO? Для ответа на этот вопрос используем подобие треугольников BOC и AOD и данные нам длины оснований трапеции: $\frac{BO}{DO} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Вооружившись этими знаниями найдем площадь треугольника AOB. Это одна третья от площади треугольника AOD, то есть $S_{AOB} = 3$.

Вроде бы ответ получен, но осадочек остался. Почему-то в задаче еще дана площадь всей трапеции, а мы ее не использовали. Странно. Она нам не помогла, но вдруг она нам помешает? Давайте найдем площадь всей трапеции, используя отношение оснований и площадь треугольника AOD. Вся трапеция состоит из четырех треугольников. Площадь треугольника AOD известна и равна 9. Площадь треугольника AOB найдена и равна 3. Площадь треугольника COD находится точно так же, как и площадь треугольника AOB и тоже равна 3. Площадь треугольника BOC относится к площади треугольника AOD как квадрат коэффициента подобия и равна 1. В сумме получается 16, а вовсе на 25, как указано в задаче.

Ответ. Условия задачи некорректны (противоречивы и т.п.).

C4. Найдите все целые значения параметра s, при которых оба корня уравнения $x^2 - 15x + 3s - 1 = 0$ являются целыми числами, а их произведение больше 42 (8 баллов).

Решение. Произведение корней квадратного уравнения по надоевшей уже всем теореме Виета равно $3s - 1$. По условию $3s - 1 > 42$, то есть $s > 14\frac{1}{3}$.

Но этого условия мало. Корни при этом должны быть, то есть дискриминант квадратного уравнения должен быть неотрицательным. Получаем еще одно условие $225 - 12s + 4 \geqslant 0$ или $s \leqslant 19\frac{1}{12}$.

Из полученного промежутка надо выбрать целые значения s и проверить, когда корни будут целыми. Всего пять вариантов.

1) $s = 15$. В этом случае дискриминант равен 49, и корни получаются целыми (это мы проверили устно).

2) $s = 16$. В этом случае дискриминант равен 37, значит корни иррациональны.

3) $s = 17$. В этом случае дискриминант равен 25, и снова корни целые (и снова устная проверка).

4) $s = 18$. В этом случае дискриминант равен 13, опять не подходит.

5) $s = 19$. В этом случае дискриминант равен 1, и опять целые корни (тут тоже проверили устно).

Ответ. 15, 17 и 19.

Вступительный экзамен по математике для поступающих в 9 фм, фх и ми классы СУНЦ УрФУ май 2017 года Вариант 2

Часть B

B1. Пароход проходит по реке путь от Нижнего Новгорода до Астрахани за 5 суток, а от Астрахани до Нижнего Новгорода за 7 суток. За сколько суток пройдет то же расстояние плот (2 балла)?

Ответ. 35 суток.

B2. Известно, что 9 является корнем квадратного трехчлена $x^2 - 12x + c$. Определите c и второй корень (2 балла).

Ответ. $c = 27$, $x_2 = 3$.

B3. Вычислите $\dfrac{256^3 - 8^5}{256^3 + 8^5} : \dfrac{243^3 + 27^5}{243^3 - 27^5}$ (2 балла).

Ответ. Не существует (не определено, не корректно, не вычисляется и т.п.).

B4. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна $2\sqrt{3}$. Эта медиана делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите катеты треугольника (2 балла).

Ответ. $2\sqrt{3}$ и 6.

B5. Трехзначное число начинается с цифры 4. Если ее перенести в конец числа, то получится число, составляющее 3/4 от исходного. Найдите исходное трехзначное число (2 балла).

Ответ. 432.

B6. Решите неравенство $(x^2 + 9)(x^2 - 3x - 4) \leqslant 0$ (2 балла).

Ответ. $[-1,\ 4]$.

B7. Решите систему $\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ |x - y| = 6 \end{cases}$ (2 балла).

Ответ. $(7,\ 1)$, $(1,\ -5)$, $(-7,\ -1)$, $(-1,\ 5)$.

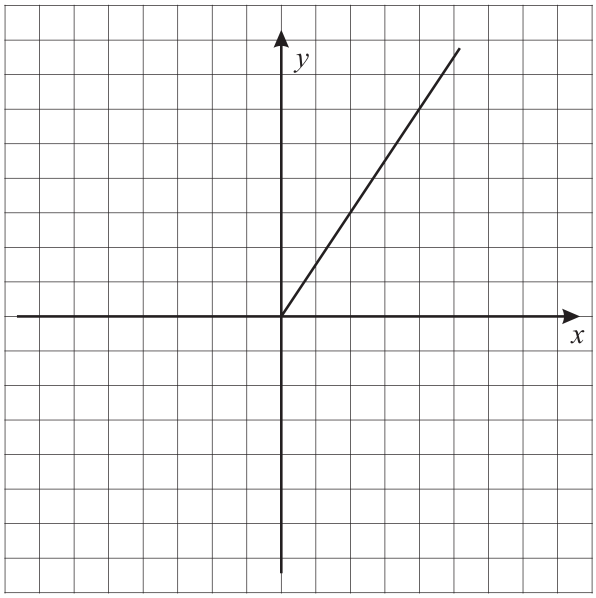
B8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите угол между диагоналями, если $\angle BDC = 40^\circ$, а угол между прямыми AB и CD равен 30° (2 балла).

Ответ. 50° или 70°.

B9. Постройте график функции

$$y = \frac{(\sqrt{x})^2 + 2|x|}{2} \text{ (2 балла).}$$

Решение. $y = \frac{x+2|x|}{2}$, но только при $x \geqslant 0$, то есть можно еще и модуль раскрыть: $y = 3x/2$.



Часть C

К заданиям нужно не только привести ответ, но и полностью оформить решение.

C1. Зная, что $a + b = 3$ и $ab = 1$, найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{3a^2} - \frac{1}{3b^2}\right)^4 : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^4 \text{ (8 баллов).}$$

Ответ. 6.

C2. Производительность труда второй бригады на 20% больше, а производительность труда третьей бригады на 20% меньше, чем производительность труда первой бригады. Вторая бригада выполняет ту же работу, которую выполняют первая и третья бригады вместе. На сколько процентов время выполнения работы второй бригадой больше времени выполнения совместной работы первой и третьей бригадами (8 баллов)?

Ответ. 50%.

C3. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площадь трапеции равна 36, а основания BC и AD соответственно равны 2 и 8. Найдите площадь треугольника BOC, если известно, что площадь треугольника AOB равна 8 (8 баллов).

Ответ. Условия задачи некорректны (противоречивы и т.п.).

C4. Найдите все целые значения параметра k, при которых оба корня уравнения $x^2 - 13x + 2k - 4 = 0$ являются целыми числами, а их произведение больше 33 (8 баллов).

Ответ. 20, 22 и 23.

Критерии оценивания

B1. *1 балл:* если перепутали и нашли время, за которое пароход бы добрался по суше.

B2. *1 балл:* если верно найдено только одно из значений — параметра или второго корня.

B3. *1 балл:* если указан ответ 0.

B4. *1 балл:* если верно найдена только одна величина.

B5. *1 балл:* если нашли не исходное, а новое число.

B6. *1 балл:* если вместо отрезка указан интервал или полуинтервал с теми же границами.

B7. *1 балл:* если верно указаны два из четырех решений системы.

B8. *1 балл:* если указан один из вариантов.

B9. всё или ничего.

Часть C

C1. *+1 балл:* замена знаменателей ab на число, указанное в условии.
+1 балл: использование формулы разности квадратов.
+2 балла: упрощение второго слагаемого, возможно без использования формулы разности квадратов.
+2 балла: преобразование $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$.
+2 балла: доведение вычислений до верного ответа.

C2. *+1 балл:* зависимость производительности второй бригады от производительности первой.

+1 балл: зависимость производительности третьей бригады от производительности первой.

+1 балл: зависимость времени второй бригады от производительности первой.

+2 балла: зависимость времени первой и третьей бригад от производительности первой.

+2 балла: зависимость времени первой и третьей бригад от времени второй в процентах.

+1 балл: верный ответ, полученный из верных рассуждений.

C3. *=1 балл:* упоминание подобия треугольников AOD и BOC.

=4 балла: нахождение искомой площади как-нибудь.

=8 баллов: полное решение.

C4. *+1 балл:* условие на произведение корней.

+1 балл: условие существование корней.

+1 балл: нахождение целых значений параметра из предыдущих двух условий.

+1 балл: за проверку каждого из найденных пяти значений параметра.