Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Сумма

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

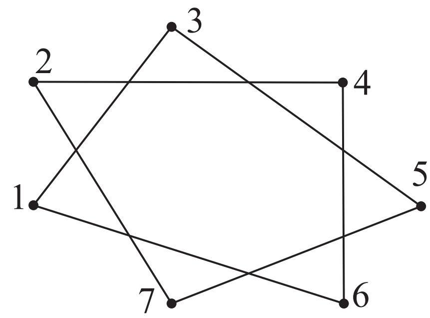
СУНЦ УрФУ
Комплексное вступительное испытание
по математике и физике для поступающих в 8 класс

Часть 1

В заданиях 1–6 записать ответ в указанном месте. Дополнительной литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя. **Если получается несколько вариантов, нужно указать их все.** Знаки градуса и единицы измерения в ответе писать не нужно.

1. *(2 балла)* На планете Чу 31 декабря 2016 года было 67 государств. По древней традиции каждый год первого января некоторые три государства объединяются и образовывают одно новое государство, а некоторое другое государство распадается на два. Сколько государств будет на планете Чу второго января 2067 года? Ответ:______________

2. *(2 балла)* Фёдор сделал набросок символа мудрости из храма Афины Паллады (см. рисунок). Помогите Фёдору определить сумму семи углов, отмеченных цифрами от 1 до 7. Ответ:______________



3. *(2 балла)* Фёдор задумал два числа. Когда Миша спросил какие именно, Фёдор ответил: “Если первое увеличить на 20% и сложить со вторым, то получится 112. Если же второе уменьшить на 30% и сложить с первым, то получится 80”. Миша узнал, что это за числа, и назвал Фёдору их сумму. Какое число сказал Миша? Ответ:______________

4. Средняя плотность человеческого тела равна 1070 кг/м^3. Какой объём воды в литрах вытеснит из полностью заполненной ванны человек массой 70 кг при полном погружении в неё? *(2 балла)* Ответ:__________________

5. *(2 балла)* На какую **наибольшую** степень двойки может делиться произведение пяти подряд идущих двузначных натуральных чисел? (Например, если произведение делится на 2^5, но не делится на 2^6, то в ответе надо указать число 5.) Ответ:_____

6. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{\left(17^5+\dfrac{1}{34}\right)^2-\left(17^5-\dfrac{1}{34}\right)^2}{(2^4+1)^3} : \dfrac{119}{3}$. В ответ запишите правильную дробь (например, $\frac{7}{13}$). Ответ:____________

Часть II

В заданиях 7–12 привести полные решения.

7. *(6 баллов)* На координатной плоскости нарисовали и подписали графики функций $y = x - 1$, $y = x + 3$ и $y = 1$. Затем координатные оси стерли. Как с помощью циркуля и линейки восстановить координатные оси и масштаб измерения? (Примечание: при отсутствии циркуля построения можно выполнять от руки, указывая центр и радиус окружности.)

8. *(6 баллов)* Роботы C-3PO и R2D2 были отправлены из пунктов A и B навстречу друг другу. Встретившись, они продолжили движение, причем после встречи C-3PO понадобилось 25 часов, чтобы добраться до B, а R2D2 затратил 16 часов после встречи, чтобы достичь пункта A. Сколько всего времени понадобилось каждому из них, чтобы проделать весь путь? Скорости роботов считать постоянными, временем встречи пренебречь, расстояние между A и B ненулевое.

9. *(7 баллов)* На планете Чу очень любят скачки. Однажды жители планеты задумались над вопросом: какое наименьшее число забегов по 5 лошадей в каждом необходимо устроить, чтобы выявить трех самых быстрых лошадей из 9? Объясните, как именно нужно проводить забеги и докажите, почему нельзя обойтись меньшим числом забегов. Необходимо учесть, что лошади во время забегов не пересекают финишную черту одновременно и часы на планете Чу до сих пор не изобретены.

10. *(6 баллов)* Робот-пылесос движется по прямой со скоростью, которая меняется в зависимости от степени чистоты пола. График зависимости его скорости от пройденного расстояния x приведен на рис. 1. Сколько времени робот будет пылесосить отрезок AB (4 балла)? Чему равна средняя скорость движения робота (2 балла)?

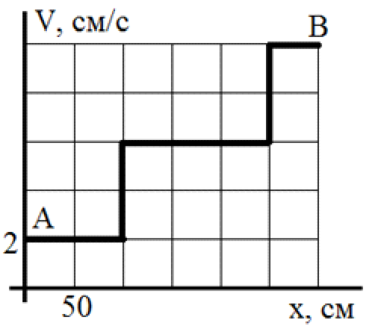


Рис. 1.

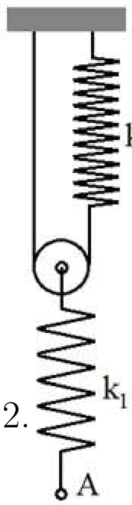


Рис. 2.

11. *(7 баллов)* На сколько опустится вниз точка A (рис. 2), если к ней подвесить груз массой 2 кг? Коэффициенты упругости пружин равны $k_1 = 100\,\frac{Н}{м}$; $k_2 = 50\,\frac{Н}{м}$.

12. *(6 баллов)* На столе стоит пластилиновый куб. Давление, оказываемое им на стол, равно 100 Па. Сверху на пластилин положили стальной куб, ребро которого больше в три раза ребра пластилинового куба. Пластилин под тяжестью стального куба расплющился так, что площадь его контакта со столом увеличилась в два раза. Чему теперь равно давление на стол? Плотность пластилина 1400 кг/м^3, плотность стали 8700 кг/м^3.

Ответы и комментарии к решениям задач первой части

1. 16. **2.** 540. **3.** 110. **4.** $65,4$. **5.** 9. **6.** $6/7$.

1. Определим как меняется число государств первого января каждого года. Вместо трех государств образуется одно, т.е. минус два государства, а одно, распадаясь на два, дает плюс одно государство. Таким образом, число государств уменьшается на единицу первого января каждого года. За обозначенный период произойдет 51 такое изменение (первый раз — 1 января 2017г, последний — 1 января 2067г).

2. Сначала определим сумму углов семиугольника $ABCDEFG$ на рис. 3. Разбив его на пять треугольников (под $\angle A$ понимаем $\angle BAG$), получим

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=5\cdot 180^\circ. \qquad (*)$$

Из треугольника с вершинами 1, A и B (рис. 4) получим $\angle 1=180^\circ-(180^\circ-\angle A)-(180^\circ-\angle B)=\angle A+\angle B-180^\circ$. Аналогично $\angle 2=\angle B+\angle C-180^\circ$ и т.д. Таким образом, учитывая $(*)$, находим

$$\angle 1+\angle 2+\dots+\angle 7=2(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G)-7\cdot 180^\circ=$$

$$=10\cdot 180^\circ-7\cdot 180^\circ=540^\circ.$$

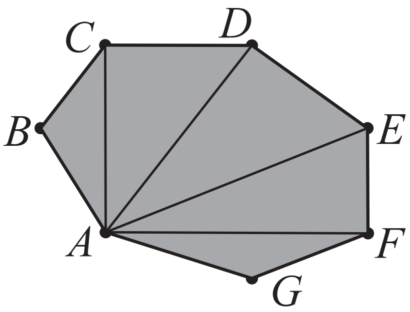


Рис. 3.

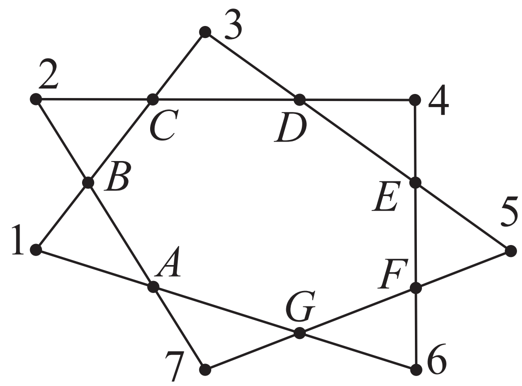


Рис. 4.

3. Обозначим через x первое число, через y — второе. Увеличение первого числа на 20% дает нам $\frac{120}{100}x$ или $\frac{6}{5}x$, уменьшение второго числа на 30% дает $\frac{70}{100}y$ или $\frac{7}{10}y$. Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{6}{5}x+y=112, \\ x+\frac{7}{10}y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=80-\frac{7}{10}y, \\ \frac{6}{5}(80-\frac{7}{10}y)+y=112. \end{cases}$$

Раскрывая скобки в последнем уравнении, приходим к $96-\frac{42}{50}y+y=112$ или $\frac{8}{50}y=16$, откуда $y=100$ и $x=10$. Их сумма является искомым числом.

4. Решение см. во второй части разбора.

5. Ясно, что числа, кратные 8, идут через 8 (так как имеют вид $8k$); кратные шестнадцати — через шестнадцать и т.д. Среди двузначных есть единственное число, кратное 2^6 (это число 64), через два от него находятся числа, которые делятся только на первую степень двойки, и через четыре — на вторую. В результате только два произведения пяти последовательных чисел $64\cdot 65\cdot 66\cdot 67\cdot 68$ и $60\cdot 61\cdot 62\cdot 63\cdot 64$ делятся на максимально возможную степень двойки — девятую.

6. Учтем, что $\left(17^5+\dfrac{1}{34}\right)^2-\left(17^5-\dfrac{1}{34}\right)^2=2\cdot 17^5\cdot\frac{2}{34}=2\cdot 17^4$, $(2^4+1)^3=17^3$, $119=17\cdot 7$. В результате дробь можно преобразовать к $6/7$.

Решения и критерии оценивания задач второй части

7. *(6 баллов)* На координатной плоскости нарисовали и подписали графики функций $y = x - 1$, $y = x + 3$ и $y = 1$. Затем координатные оси стерли. Как с помощью циркуля и линейки восстановить координатные оси и масштаб измерения? (Примечание: при отсутствии циркуля построения можно выполнять от руки, указывая центр и радиус окружности.)

Решение. Пусть A — точка пересечения прямых $y = x - 1$ и $y = 1$ (рис. 5), тогда ее координаты равны $(2, 1)$. Аналогично находим координаты точки $B(-2, 1)$, лежащей одновременно на прямых $y = x + 3$ и $y = 1$. Сравнивая координаты $A(2, 1)$ и $B(-2, 1)$, замечаем, что эти точки должны быть симметричными относительно оси Oy. Строим серединный перпендикуляр к отрезку AB, он и будет искомой осью Oy (для построения серединного перпендикуляра к отрезку AB проводим две окружности с центрами в A и B радиуса AB, затем соединяем две точки пересечения этих окружностей). Отметим также точку C — точку пересечения отрезка AB с осью Oy. Очевидно, что ее координаты равны $(0, 1)$. Пересечение прямой $y = x - 1$ с осью Oy (точка D на рисунке) имеет координаты $(0, -1)$. Осталось сравнить координаты точек $C(0, 1)$ и $D(0, -1)$. Заключаем, что серединный перпендикуляр к отрезку CD будет осью Ox. Получаем одновременно начало координат (точка O на рисунке) и единичный отрезок OC.

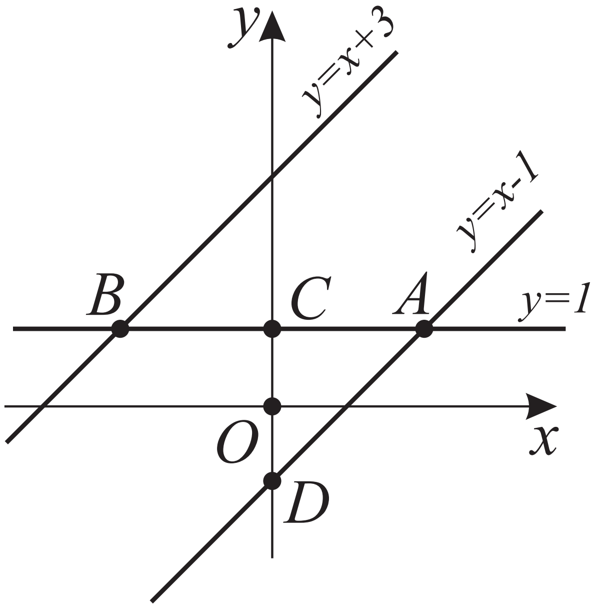


Рис. 5.

Критерии оценивания. Правильное определение координат точек A и B — по 1 баллу. Построение оси Oy — 1 балл. Построение оси Ox — 2 балла. Верно найденный масштаб — 1 балл.

8. *(6 баллов)* Роботы C-3PO и R2D2 были отправлены из пунктов A и B навстречу друг другу. Встретившись, они продолжили движение, причем после встречи C-3PO понадобилось 25 часов, чтобы добраться до B, а R2D2 затратил 16 часов после встречи, чтобы достичь пункта A. Сколько всего времени понадобилось каждому из них, чтобы проделать весь путь? Скорости роботов считать постоянными, временем встречи пренебречь, расстояние между A и B ненулевое.

Решение. Обозначим через v_c и v_r (км/ч) скорости C-3PO и R2D2 соответственно. Пусть также t (часов) — время до встречи двух роботов и S (км) — длина пути между A и B. Тогда условие задачи можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} (v_c + v_r)t = S, \\ 16v_r = v_c \cdot t, \\ 25v_c = v_r \cdot t. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на третье, получим $\dfrac{16}{25} \cdot \dfrac{v_r}{v_c} = \dfrac{v_c}{v_r}$, откуда $\left(\dfrac{v_r}{v_c}\right)^2 = 25/16$ или $\dfrac{v_r}{v_c} = 5/4$. Таким образом $v_r = 5v_c/4$. Сложим последние два уравнения системы и получим $16v_r + 25v_c = S$. Учитывая найденное соотношение между скоростями двух роботов, получим $45v_c = S$ и $36v_r = S$. Таким образом, C-3PO необходимо 45 часов на преодоление всего пути, а R2D2 — 36 часов.

Критерии оценивания. Верно составленная математическая модель — 3 балла. Установление соотношения между скоростями роботов — 1 балл. Определение общего времени в пути C-3PO и R2D2 — по 1 баллу.

9. *(7 баллов)* Какое наименьшее число забегов по 5 лошадей в каждом необходимо устроить, чтобы выявить трех самых быстрых лошадей из 9? Объясните, как именно нужно проводить забеги и докажите, почему нельзя обойтись меньшим числом забегов.

Решение. Приведем пример, как можно устроить три забега. Обозначим всех лошадей числами от 1 до 9. В первом забеге побегут лошади с номерами от 1 до 5. Можно считать, что первыми придут лошади с номерами 1, 2 и 3 именно в таком порядке. Тогда во втором забеге побегут лошади 1, 2, 3, 6 и 7. Выберем из них трёх самых быстрых, и в последнем забеге побегут они и лошади 8 и 9.

Докажем, что за меньшее число забегов нельзя гарантированно определить даже двух самых быстрых лошадей, не говоря уже о лучшей тройке.

Если был устроен всего один забег, тогда какие-то четыре лошади в нем не участвовали, и самая быстрая лошадь может оказаться среди этой четверки. Таким образом, за один забег гарантированно нельзя определить даже одну самую быструю лошадь из девяти.

Докажем, что нельзя обойтись двумя забегами для определения лучшей пары. Снова будем считать, что в первом забеге побегут лошади с номерами от 1 до 5. Пусть в результате этого забега первой пришла лошадь №1, второй — с №2 (по условию лошади одновременно финиш не пересекают). Очевидно, что лошади с третьей по пятую далее рассматриваться не будут. Для образования второй пятерки возможны три различных случая.

Первый случай. Одна из лошадей множества $\{6, 7, 8, 9\}$ не участвует во втором забеге. Пусть этой «темной» лошадкой будет №9. Если она является самой быстрой, то за предложенные два забега мы не сможем определить ее лучшие скоростные качества.

Второй случай. Во втором забеге участвуют лошади с номерами из множества $\{1, 6, 7, 8, 9\}$. Если самой быстрой в этом забеге оказалась снова лошадь с №1, а следом была лошадь №9 (например), то у нас нет возможности сравнить лошадей №2 и №9. Поэтому гарантированно лучшую пару среди девяти лошадей мы определить не сможем.

Третий случай. Во втором забеге участвуют лошади с номерами из множества $\{2, 6, 7, 8, 9\}$. Если лошадь с №2 оказалась самой последней, а первыми были лошади №7 и №8 (например), то у нас нет возможности сравнить лошадь №1 с лошадьми №7 и №8 (так как забегов больше не осталось). И в этом случае гарантированно лучшую пару из девяти лошадей мы определить не сможем.

Критерии оценивания. Только верный ответ — 0 баллов. Верный пример за три забега — 3 балла (и 1 балл, если построен пример только за четыре забега). Верное доказательство, что одного забега недостаточно — 1 балл. Верное доказательство, что двух забегов недостаточно — 3 балла.