РЕШЕНИЯ
вступительной работы по математике
для поступающих в 10 физ-мат, мат-эк, мат-инф и физ-тех классы

30 апреля 2017 года

Вариант 1

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2-4}{x-2}+x=2(x+1)$ *(2 балла)*.

Решение. Дробь в левой части уравнения имеет смысл, если $x\neq 2$. После сокращения дроби и приведения подобных слагаемых в левой части уравнение превращается в тождество $2x+2=2x+2$, выполняющееся для всех x.

Ответ: $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2. Влажность свежескошенной травы составляет 60%, а влажность сена 20%. Сколько сена получится из 1000 кг свежескошенной травы? *(2 балла)*.

Решение. В 1000 кг свежескошенной травы содержится 600 кг воды и, следовательно, 400 кг сухого вещества. Эти 400 кг сухого вещества в сене составляют 80%, поэтому масса сена равна $400:0,8=500$ (кг).

Ответ: 500 кг.

3. Вычислите $\sqrt{5+2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt{2}$ *(2 балла)*.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{5+2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{5+2\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}+1^2}}=\sqrt{5+2\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{5+2\left|\sqrt{2}-1\right|}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}+1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=$$

$$=\left|\sqrt{2}+1\right|=\sqrt{2}+1.$$

Ответ: 1.

4. На сторонах KL и KM треугольника KLM отмечены соответственно точки S и T так, что $LS:SK=2$, $MT:TK=\frac{1}{2}$. Известно, кроме того, что $KL=KM=6$ и площадь треугольника KST равна 6. Найдите площадь треугольника KLM. *(2 балла)*.

Решение. Из условия находим: $KS=2$, $KT=4$. Треугольника со сторонами 2 и 4 и площадью 6 не существует; если этого не заметить и решать задачу дальше (этот вариант решения тоже засчитывается), получим: площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения длин прилежащих к этому углу сторон, получаем $\dfrac{S_{KST}}{S_{KLM}} = \dfrac{2\cdot 4}{6\cdot 6} = \dfrac{2}{9}$. По условию $S_{KST} = 6$, откуда $S_{KLM} = 6 : \frac{2}{9} = 27$.

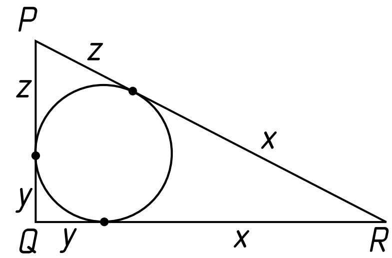
Ответ: 27 *либо* такого треугольника не существует.

5. В фермерском хозяйстве содержатся козлы и бараны, причем козлов в 1,04 раза больше, чем баранов. Сколько всего животных в хозяйстве, если известно, что их меньше 100? *(2 балла)*.

Решение. Пусть в хозяйстве содержится k козлов и b баранов, тогда по условию $k = 1,04b$, то есть $k - b = \frac{1}{25}b$. Левая часть этого равенства — целое число, поэтому b делится на 25. При $b = 25$ получим $k = 26$, а общее количество животных 51. При $b = 50$ или больше общее количество животных получится больше 100.

Ответ: 51.

6. В прямоугольный треугольник PQR с катетами $PQ = 5$, $RQ = 12$ вписана окружность. Найдите расстояние от точки R до точки касания окружности со стороной RQ *(2 балла)*.



Решение. Пользуясь тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, введем обозначения, как показано на рисунке. По теореме Пифагора $PR = 13$, отсюда находим, что периметр треугольника равен 30. Итак, $2x + 2y + 2z = 30$, то есть $x + y + z = 15$. Но $y + z = PQ = 5$, отсюда $x = 15 - 5 = 10$.

Ответ: 10.

7. Решите уравнение $\big||x-2|-3\big| = 7$ *(2 балла)*.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} |x-2|-3=7, \\ |x-2|-3=-7. \end{array}\right.$ Второе уравнение этой совокупности, $|x-2|-3=-7$, или $|x-2|=-4$, решений, очевидно, не имеет. Первое уравнение, $|x-2|-3=7$, или $|x-2|=10$, снова равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x-2=10, \\ x-2=-10, \end{array}\right.$ решая которую, получим $x = 12$ или $x = -8$.

Ответ: $\{-8; 12\}$.

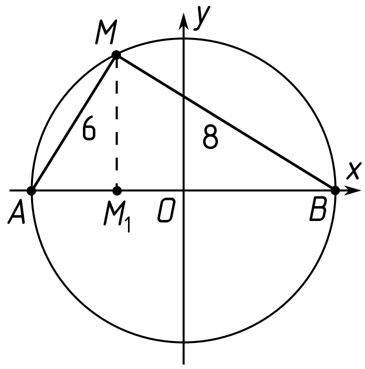
8. По данным рисунка (O — центр окружности, $AM = 6$, $MB = 8$) найдите координаты точки M *(3 балла)*.

Решение. Заметим, что угол AMB опирается на диаметр и поэтому является прямым. По теореме Пифагора $AB = 10$. Имеем:

$$MM_1 = AM\cdot\sin\angle MAB = 6\cdot\frac{8}{10} = 4\frac{4}{5},$$

$$AM_1 = AM\cdot\cos\angle MAB = 6\cdot\frac{6}{10} = 3\frac{3}{5},\ \ OM_1 = AO - AM_1 = 5 - 3\frac{3}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

Ответ: $M\left(-1\frac{2}{5};\ 4\frac{4}{5}\right)$.



9. Самая мелкая монета в Китае — 1 юань. Женя и Лёша поехали в Китай и решили купить там себе по шоколадке. Жене не хватило 7 юаней, а Лёше не хватило 2 юаней. Когда они сложили свои деньги, их всё равно не хватило даже на покупку одной шоколадки. Сколько стоит одна шоколадка? *(3 балла).*

Решение. Женя не могла добавить Лёше 2 юаня или больше, иначе им бы хватило на шоколадку. Следовательно, у Жени был 1 юань, который она и добавила Лёше. Поэтому шоколадка стоила $1+7=8$ (юаней).

Ответ: 8 юаней.

10. Решите неравенство $\sqrt{2x-4}-\sqrt{2-x}\leqslant\sqrt{x^3-7}$ *(3 балла).*

Решение. Рассматривая первое и второе подкоренные выражения, легко заметить, что ОДЗ неравенства состоит из единственного числа $x=2$. Подставляя это число в неравенство, убеждаемся, что $x=2$ является решением неравенства.

Ответ: $x=2$.

11. Известно, что функция $f(x)=(a^2+4a-12)x^2-ax-5$ убывает на всей области определения. Найдите a *(3 балла).*

Решение. Квадратичная функция не может убывать на всей области определения, поэтому $a^2+4a-12=0$, откуда $a=-6$ или $a=2$. При $a=-6$ получим $f(x)=6x-5$, то есть возрастающую функцию. При $a=2$ получим $f(x)=-2x-5$ — убывающую функцию.

Ответ: $a=2$.

12. Даны точки $A(-1;-1)$ и $B(3;7)$. Для точки $M(x;y)$, лежащей на прямой AB, значение выражения x^2-2x+y^2 меньше, чем для других точек этой прямой. Найдите x и y *(5 баллов).*

Решение. Пусть уравнение прямой AB имеет вид $y=kx+b$, тогда из условия принадлежности этой прямой точек A и B получим систему $\begin{cases}(-1)k+b=-1,\\ 3k+b=7,\end{cases}$ решая которую, находим $k=2$, $b=1$. Таким образом, для координат (x,y) всех точек, лежащих на прямой AB, выполняется соотношение $y=2x+1$, поэтому для всех точек прямой AB значение указанного в условии выражения равно

$$x^2-2x+y^2=x^2-2x+(2x+1)^2=5x^2+2x+1.$$

Наименьшее значение этого выражения достигается при $x_0=\dfrac{-2}{2\cdot5}=-\dfrac{1}{5}$, при этом $y_0=2x_0+1=2\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)+1=\dfrac{3}{5}$. Полученные значения и являются координатами точки M.

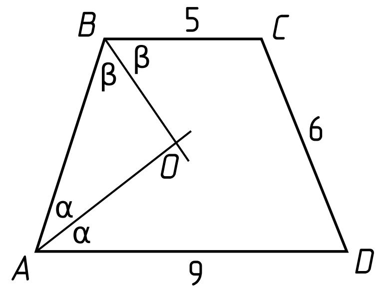
Ответ: $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{5}$.

13. Вася Ёжиков тренировался в возведении чисел в квадрат. Как-то раз он возвел натуральное число в квадрат и с удивлением обнаружил, что результат записан только цифрами 2 и 4, причем количество двоек в записи равно 46, а количество четверок — 16. Докажите, что Вася где-то ошибся. *(7 баллов)*.

Решение. Найдем сумму цифр полученного Васей числа: $2 \cdot 46 + 4 \cdot 16 = 156$. Это число делится на 3, но не делится на 9, поэтому и полученный Васей результат делится на 3, но не делится на 9. Такого не может быть, потому что если n^2 делится на 3, то оно должно делиться и на 9. Докажем это.

Разложим n на простые множители. Очевидно, что те же самые множители будут и в разложении числа n^2, но каждый из них будет в удвоенном количестве. Если в разложении n^2 на простые множители встречается множитель 3, то он должен присутствовать с показателем степени не меньше двух, поэтому n^2 делится на 9.

14. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD = 9$, $BC = 5$ и боковой стороны $CD = 6$. В трапецию вписана окружность с центром в точке O. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника ABO *(7 баллов)*.



Решение. Поскольку трапеция является описанной, суммы длин ее противоположных сторон равны, откуда $AB = 8$. Центр вписанной в трапецию окружности лежит на пересечении биссектрис углов трапеции; введем поэтому обозначения углов, как показано на рисунке. Углы A и B — односторонние при пересечении параллельных прямых секущей, поэтому $2\alpha + 2\beta = 180°$, то есть $\alpha + \beta = 90°$, откуда $\angle AOB = 90°$. Таким образом, треугольник ABO — прямоугольный, поэтому диаметр описанной около него окружности равен длине его гипотенузы AB.

Ответ: 8.

15. Компания друзей угадывает, сколько спичек лежит в закрытом спичечном коробке, и называет варианты ответа: 32, 23, 27, 39, 37. Известно, что эти варианты отличаются от правильного ответа на 4, 8, 1, 6, 8 (порядок изменён). Сколько спичек лежит в коробке? *(5 баллов)*.

Решение. Заметим, что в ряду разностей между предложенными вариантами и правильным вариантом дважды встречается число 8. Это может быть только в одном случае: когда один из предложенных вариантов отличается от правильного на 8 в меньшую сторону, а другой — в бо́льшую. Таким образом, среди предложенных вариантов нам необходимо найти два, разность между которыми равна 16. Такими вариантами являются 23 и 39, а правильным вариантом, следовательно, является $23 + 8 = 39 - 8 = 31$.

Ответ: 31.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\dfrac{16 - x^2}{x + 4} + 5x = 4(x + 1)$ *(2 балла).*

Решение. Дробь в левой части уравнения имеет смысл, если $x \neq -4$. После сокращения дроби и приведения подобных слагаемых в левой части уравнение превращается в тождество $4x + 4 = 4x + 4$, выполняющееся для всех x.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

2. Влажность винограда составляет 80%, а влажность изюма 10%. Сколько изюма получится из 900 кг винограда? *(2 балла).*

Решение. В 900 кг винограда содержится 720 кг воды и, следовательно, 180 кг сухого вещества. Эти 180 кг сухого вещества в изюме составляют 90%, поэтому масса изюма равна $180 : 0,9 = 200$ (кг).

Ответ: 200 кг.

3. Вычислите $\sqrt{7 - 2\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} - \sqrt{2}$ *(2 балла).*

Решение. Имеем:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{2^2 - 4\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{\left(2 - \sqrt{2}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{7 - 2\left|2 - \sqrt{2}\right|} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{2} + 1\right| = \sqrt{2} + 1.$$

Ответ: 1.

4. На сторонах RS и RT треугольника RST отмечены соответственно точки M и N так, что $SM : MR = \frac{1}{3}$, $TN : NR = 1$. Известно, кроме того, что $RS = RT = 8$ и площадь треугольника RST равна 24. Найдите площадь треугольника RMN. *(2 балла).*

Решение. Из условия находим: $RM = 6$, $RN = 4$. Поскольку площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения длин прилежащих к этому углу сторон, получаем $\dfrac{S_{RMN}}{S_{RST}} = \dfrac{6 \cdot 4}{8 \cdot 8} = \dfrac{3}{8}$. По условию $S_{RST} = 24$, откуда $S_{RMN} = 24 \cdot \frac{3}{8} = 9$.

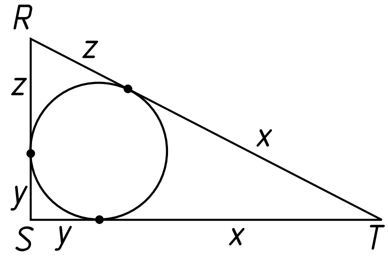
Ответ: 9.

5. Количество девочек в классе в 1,125 раза больше, чем количество мальчиков. Сколько всего человек в классе, если известно, что их меньше 30? *(2 балла)*.

Решение. Пусть в классе учится d девочек и m мальчиков, тогда по условию $d = 1,125m$, то есть $d - m = \frac{1}{8}m$. Левая часть этого равенства — целое число, поэтому m делится на 8. При $m = 8$ получим $d = 9$, а общее количество учащихся 17. При $m = 16$ или больше общее количество учащихся получится больше 30.

Ответ: 17.

6. В прямоугольный треугольник RST с катетом $RS = 6$ и гипотенузой $RT = 10$ вписана окружность. Найдите расстояние от точки T до точки касания окружности со стороной TS *(2 балла)*.



Решение. Пользуясь тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, введем обозначения, как показано на рисунке. По теореме Пифагора $ST = 8$, отсюда находим, что периметр треугольника равен 24. Итак, $2x+2y+2z = 24$, то есть $x+y+z = 12$. Но $y+z = RS = 6$, отсюда $x = 12-6 = 6$.

Ответ: 6.

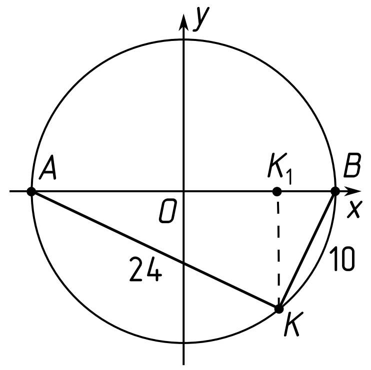
7. Решите уравнение $\big||y-3|-1\big| = 5$ *(2 балла)*.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}|y-3|-1=5,\\ |y-3|-1=-5.\end{array}\right.$

Второе уравнение этой совокупности, $|y-3|-1 = -5$, или $|y-3| = -4$, решений, очевидно, не имеет. Первое уравнение, $|y-3|-1 = 5$, или $|y-3| = 6$, снова равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}y-3=6,\\ y-3=-6,\end{array}\right.$ решая которую, получим $y = 9$ или $y = -3$.

Ответ: $\{-3; 9\}$.

8. По данным рисунка (O — центр окружности, $AK = 24$, $KB = 10$) найдите координаты точки K *(3 балла)*.



Решение. Заметим, что угол AKB опирается на диаметр и поэтому является прямым. По теореме Пифагора $AB = 26$. Имеем:

$$KK_1 = KB \cdot \sin\angle ABK = 10 \cdot \frac{24}{26} = 9\frac{3}{13},$$

$$K_1B = KB \cdot \cos\angle ABK = 10 \cdot \frac{10}{26} = 3\frac{11}{13}, \quad OK_1 = OB - K_1B = 13 - 3\frac{11}{13} = 9\frac{2}{13}.$$

Ответ: $K\left(9\frac{2}{13};\ -9\frac{3}{13}\right)$.

9. Самая мелкая монета в Америке — 1 цент. Зина и Артём поехали в Америку и решили купить там себе по пончику. Зине не хватило 2 центов, а Артёму не хватило 9 центов. Когда они сложили свои деньги, их всё равно не хватило даже на покупку одного пончика. Сколько стоит один пончик? *(3 балла)*.

Решение. Артём не мог добавить Зине 2 цента или больше, иначе им бы хватило на пончик. Следовательно, у Артёма был 1 цент, который он и добавил Зине. Поэтому пончик стоил $1+9=10$ (центов).

Ответ: 10 центов.

10. Решите неравенство $\sqrt{3-x}+\sqrt{x^3+1}\geqslant\sqrt{3x-9}$ *(3 балла)*.

Решение. Рассматривая первое и третье подкоренные выражения, легко заметить, что ОДЗ неравенства состоит из единственного числа $x=3$. Подставляя это число в неравенство, убеждаемся, что $x=3$ является решением неравенства.

Ответ: $x=3$.

11. Известно, что функция $g(x)=(b^2-3b-10)x^2-bx+7$ возрастает на всей области определения. Найдите b *(3 балла)*.

Решение. Квадратичная функция не может возрастать на всей области определения, поэтому $b^2-3b-10=0$, откуда $b=-2$ или $b=5$. При $b=-2$ получим $g(x)=2x+7$, то есть возрастающую функцию. При $b=5$ получим $g(x)=-5x+7$ — убывающую функцию.

Ответ: $b=-2$.

12. Даны точки $P(-1;-4)$ и $Q(2;5)$. Для точки $K(x;y)$, лежащей на прямой PQ, значение выражения x^2+2x+y^2 меньше, чем для других точек этой прямой. Найдите x и y *(5 баллов)*.

Решение. Пусть уравнение прямой PQ имеет вид $y=kx+b$, тогда из условия принадлежности этой прямой точек P и Q получим систему $\begin{cases}(-1)k+b=-4,\\ 2k+b=5,\end{cases}$ решая которую, находим $k=3$, $b=-1$. Таким образом, для координат (x,y) всех точек, лежащих на прямой PQ, выполняется соотношение $y=3x-1$, поэтому для всех точек прямой PQ значение указанного в условии выражения равно

$$x^2+2x+y^2=x^2+2x+(3x-1)^2=10x^2-4x+1.$$

Наименьшее значение этого выражения достигается при $x_0=\dfrac{4}{2\cdot 10}=\dfrac{1}{5}$, при этом $y_0=3x_0-1=3\cdot\dfrac{1}{5}-1=-\dfrac{2}{5}$. Полученные значения и являются координатами точки K.

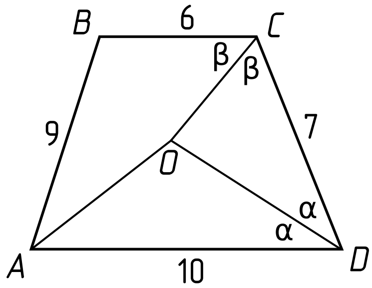
Ответ: $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{2}{5}$.

13. Дуся Лисичкина тренировалась в возведении чисел в квадрат. Как-то раз она возвела натуральное число в квадрат и с удивлением обнаружила, что результат записан только цифрами 6 и 7, причем количество шестерок в записи равно 9, а количество семерок — 12. Докажите, что Дуся где-то ошиблась. *(7 баллов)*.

Решение. Найдем сумму цифр полученного Дусей числа: $6 \cdot 9 + 7 \cdot 12 = 138$. Это число делится на 3, но не делится на 9, поэтому и полученный Дусей результат делится на 3, но не делится на 9. Такого не может быть, потому что если n^2 делится на 3, то оно должно делиться и на 9. Докажем это.

Разложим n на простые множители. Очевидно, что те же самые множители будут и в разложении числа n^2, но каждый из них будет в удвоенном количестве. Если в разложении n^2 на простые множители встречается множитель 3, то он должен присутствовать с показателем степени не меньше двух, поэтому n^2 делится на 9.

14. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD = 10$, $BC = 6$, а также боковых сторон: $AB = 9$, $CD = 7$. Биссектрисы углов BAD и CDA пересекаются в точке O. K — центр окружности, описанной около треугольника COD. Найдите величину угла CKD *(7 баллов)*.



Решение. Заметим, что $10 + 6 = 9 + 7$, поэтому в трапецию можно вписать окружность, центром которой будет являться точка пересечения биссектрис углов трапеции, то есть точка O. Следовательно, CO — биссектриса угла C; введем поэтому обозначения углов, как показано на рисунке. Углы C и D — односторонние при пересечении параллельных прямых секущей, поэтому $2\alpha + 2\beta = 180°$, то есть $\alpha + \beta = 90°$, откуда $\angle COD = 90°$. Таким образом, треугольник COD — прямоугольный, поэтому центр описанной около него окружности (точка K) является серединой его гипотенузы CD.

Ответ: $180°$.

15. Пятеро друзей готовились к поступлению в СУНЦ и решали уравнение, имеющее один корень. У всех получились разные ответы: 14, 17, 12, 24, 21. Известно, что эти ответы отличаются от правильного на 6, 3, 1, 4, 6 (порядок изменён). Каков верный ответ? *(5 баллов)*.

Решение. Заметим, что в ряду разностей между полученными ответами и правильным ответом дважды встречается число 6. Это может быть только в одном случае: когда один из полученных ответов отличается от правильного на 6 в меньшую сторону, а другой — в бóльшую. Таким образом, среди полученных ответов нам необходимо найти два, разность между которыми равна 12. Такими ответами являются 12 и 24, а правильным ответом, следовательно, является $12 + 6 = 24 - 6 = 18$.

Ответ: 18.

ОТВЕТЫ ЧАСТИ 1 И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЧАСТИ 2

Вариант 1

	Ответ	Балл		Ответ	Балл		Ответ	Балл
1	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	2	**5**	51	2	**9**	8 ю.	3
2	500 кг	2	**6**	10	2	**10**	2	3
3	1	2	**7**	$\{-8; 12\}$	2	**11**	2	3^{**}
4	не сущ. или 27	2	8	$\left(-1\frac{2}{5}; 4\frac{4}{5}\right)$	3^{*}			

Вариант 2

	Ответ	Балл		Ответ	Балл		Ответ	Балл
1	$\mathbb{R}\setminus\{-4\}$	2	**5**	17	2	**9**	10 ц.	3
2	200 кг	2	**6**	6	2	**10**	3	3
3	1	2	**7**	$\{-3; 9\}$	2	**11**	-2	3^{**}
4	9	2	8	$\left(9\frac{2}{13}; -9\frac{3}{13}\right)$	3^{*}			

Примечания:

* За одну верную координату — 1 балл. За потерю минуса — 2 балла.

** За ответ $\{2, -6\}$ (1 вар.) или $\{5, -2\}$ (2 вар.) — 1 балл.

Критерии оценки части 2

№ 12

1 балл: верно составлена система для нахождения уравнения прямой.

2 балла: верно найдено уравнение прямой.

3 балла: найдено уравнение прямой и верно записан минимизируемый квадратный трехчлен; *либо* весь ход решения верен, но при нахождении уравнения прямой или квадратного трехчлена допущены арифметические ошибки, после чего с этими ошибками верно определены точка и значение минимума.

4 балла: трехчлен записан верно, но при нахождении точки и значения минимума допущены арифметические ошибки.

№ 13

3 балла: со ссылкой на сумму цифр указано на то, что результат делится на 3 и не делится на 9 и на то, что точный квадрат таким быть не может.

+2 балла: есть попытка доказательства того факта, что $3 \mid n^2 \Rightarrow 9 \mid n^2$, однако доказательство не завершено или содержит пробелы.

№ 14

+1 балл: абитуриент знает критерий описанного четырехугольника.

+1 балл: абитуриент знает, что центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис.

3 балла: доказано, что треугольник, образованный отрезками биссектрис и боковой стороной — прямоугольный.

+1 балл: абитуриент знает, где лежит центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника.

№ 15

1 балл: приведен верный ответ, при этом в решении не содержится приведших к нему рассуждений и не доказано, что других ответов нет.

2 балла: путем разумных рассуждений (например, частичного перебора) получен верный ответ, однако из этих рассуждений не следует, что других ответов нет.

3 балла: приведен верный ответ, при этом в решении содержатся рассуждения, из которых следует, что других ответов быть не может, однако эти рассуждения не завершены или содержат пробелы.

4 балла: в работе содержится верное и полное решение задачи, однако из-за невнимательности получен неверный ответ.