

**РАЗБОР ЗАДАНИЙ. ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ.
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ**

1. Просто счет

► (2 балла) Длина одной из бактерий равна 0,5 мкм. Сколько таких бактерий уложилось бы вплотную на длине 1 см? 1 мкм – это 1 микрометр, что означает 10^{-6} м.

► (3 балла) В химии и физике принято определенное количество молекул называть молем вещества. 1 моль любого вещества содержит число молекул, равное $6,02 \cdot 10^{23}$ штук. 1 моль воды имеет массу 18 грамм. Определите массу молекулы воды и средний объем, приходящийся на 1 молекулу воды. Плотность воды равна $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

РЕШЕНИЕ:

Задача о бактериях.

Переведем все длины в метры: длина бактерии $0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$. Количество бактерий N , которые могут уложиться вплотную на 1 см, равно

$$N = \frac{10^{-2}}{5 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 10^4 = 20000.$$

Правильно 1 см и длина бактерии выражены в метрах	1
Правильно найдено количество молекул	1

Задача об 1 моле воды.

Введем следующие обозначения: M – масса одного моля воды, N_A – количество молекул в одном моле.

Масса одной молекулы воды равна

$$m_0 = \frac{M}{N_A}; \quad m_0 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Определим объем, приходящийся на 1 молекулу воды V_0 . Для этого найдем объем одного моля V_M

$$V_M = \frac{M}{\rho}.$$

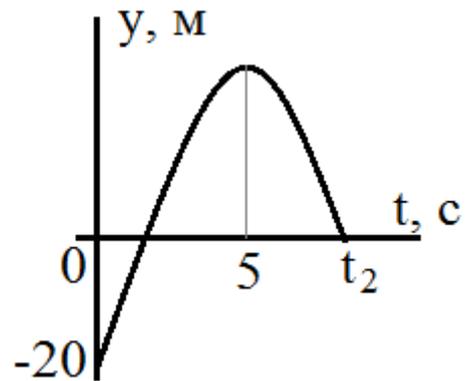
Так как в одном моле содержится N_A молекул, то объем, приходящийся на одну молекулу, равен

$$V_0 = \frac{V_M}{N_A} = \frac{M}{\rho N_A}; \quad V_0 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} \approx 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Правильно найдена масса молекулы	1
Правильно найден объем, приходящийся на 1 молекулу	2

2. Ценные камни

Дело происходит в недалеком будущем. На одной из открытых планет местными жителями организована добыча очень ценных полезных ископаемых, которые представляют из себя небольшие шарообразные камушки. Уровень развития техники на планете весьма низкий, но зато жители прекрасно умеют кидать и ловить камни. Поэтому добыча ведется открытым способом: на дне ямы сидит один инопланетянин и бросает ценные камни вертикально вверх. В момент времени t_2 камни ловит другой инопланетянин, лежащий на краю ямы. График зависимости координаты камня от времени представлен на рисунке (на рисунке изображена парабола). Ось OY проведена вертикально вверх, начало координат находится на поверхности планеты. Ускорение свободного падения на



этой планете равно $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

- (2 балла) Найдите начальную скорость камня V_0 .
- (1 балла) На какую высоту от поверхности ямы взлетел камень?
- (2 балла) Найдите время t_2 .

РЕШЕНИЕ:

По графику определяем, что в верхней точке траектории камень окажется спустя 5 секунд после броска, так как в этой точке скорость камня равна нулю, то можно записать

$$0 = V_0 - gt.$$

Отсюда определяем начальную скорость камня

$$V_0 = gt; \quad V_0 = 10 \cdot 5 = 50 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Максимальная высота подъема определяется либо так:

$$H_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}; \quad H_{\max} = \frac{50^2}{2 \cdot 10} = 125 \text{ м},$$

либо так:

$$H_{\max} = V_0 t - \frac{g}{2} t^2; \quad H_{\max} = 50 \cdot 5 - \frac{10 \cdot 5^2}{2} = 125 \text{ м}.$$

Так как высота отсчитывается от дна ямы, глубина которой 20 метров, то от поверхности планеты в высшей точке камень будет находиться на расстоянии $125 - 20 = 105$ метров.

Для того, чтобы определять время t_2 , надо сначала по графику определить координату тела в этот момент времени $y(t_2) = 0$, а затем решить квадратное уравнение

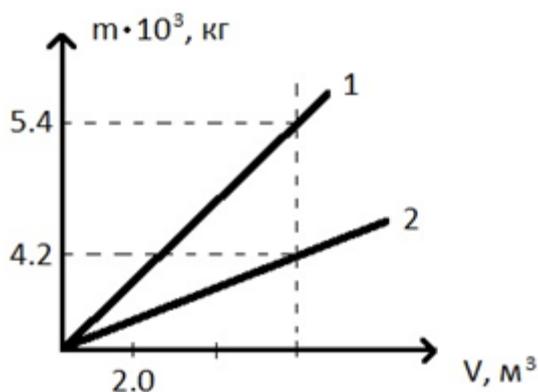
$$y(t) = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2};$$

$$0 = -20 + 50t - 5t^2.$$

Корни этого уравнения 0,42 с и 9,59 с. Ясно, что первый корень не подходит, так как в этот момент камень летел вверх, а вот второй корень и является нужным моментом времени $t_2 = 9,59$ с.

Есть понимание (явное, неявное), что в верхней точке траектории скорость равна нулю	1
Найдена начальная скорость	1
Найдена максимальная высота подъема	1
Записано выражение для зависимости вертикальной координаты от времени	0,5
Решено квадратное уравнение, найдены два момента времени	1
Оставлен один корень	0,5

3. Плотности жидкостей



На графике представлены зависимости массы двух жидкостей от их объемов. Найдите:

- ▶ (2 балла) плотность каждой жидкости;
- ▶ (3 балла) плотность смеси, получившейся при смешивании 3 кг первой жидкости и 7 кг второй жидкости (считать, что объем смеси равен сумме объемов исходных веществ).

Обратите внимание на единицы измерения

массы!

РЕШЕНИЕ:

По графику определяем, что объем 6 м^3 первой жидкости имеет массу 5400 кг, поэтому её плотность равна $\rho_1 = \frac{5400}{6} = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, а 6 м^3 второй жидкости имеют массу 4200 кг, следовательно, её масса равна $\rho_2 = \frac{4200}{6} = 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Теперь смешаем жидкости в указанной пропорции, 3 кг первой жидкости занимают объём $V_1 = \frac{3}{900} = \frac{1}{300} \text{ м}^3$, а 7 кг второй жидкости имеют объём

$$V_2 = \frac{7}{700} = \frac{1}{100} \text{ м}^3. \text{ Суммарный объем равен } V = V_1 + V_2 = \frac{1}{300} + \frac{1}{100} = \frac{4}{300} \text{ м}^3.$$

Средняя плотность получившейся при смеси жидкости равна

$$\rho = \frac{3+7}{\frac{4}{300}} = 750 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Определена плотность первой жидкости	1
Определена плотность второй жидкости	1
Найден объем обеих жидкостей и их полный объем при смешивании в указанной пропорции	2
Найдена плотность	1

4. Ждун и Опоздун

В детской клинике медицинском центре Лейденского университета установлена скульптура Ждуна, символизирующая пациента, ожидающего своей очереди к врачу. Администрация СУНЦ из-за большого количества опаздывающих на уроки намерена, в ближайшее время в вестибюле СУНЦ установить скульптуру Опоздуна, призывающую лицеистов не опаздывать на занятия. Планируется распечатать его из пластика на 3D принтере. Точные копии Опоздунов, изготовленные из того же материала, но в три раза меньшей высоты будут распечатаны и установлены в каждой аудитории.

► (2 балла) Во сколько раз масса большой скульптуры больше массы копии?

► (3 балла) Во сколько раз давление, производимое главной скульптурой в вестибюле на пол, будет отличаться от давления, создаваемого копией на пол в аудитории?

РЕШЕНИЕ:

Так как линейные размеры маленькой копии в три раза меньше размеров большой фигуры, то её объем, а, следовательно, и масса в $3^3 = 27$ раз меньше объема и массы большой фигуры.

Опять же из-за того, что линейные размеры стали в 3 раза меньше, то площадь основания (это линейный размер во второй степени) станет в 9 раз меньше.

Если обозначим M – массу большой фигуры, а S – площадь её основания, то давление, оказываемое ей на пол, будет равно

$$P = \frac{Mg}{S}.$$

Давление маленькой копии на пол равно

$$p = \frac{\frac{M}{27}g}{\frac{S}{9}} = \frac{Mg}{3} = \frac{P}{3}.$$

Таким образом, давление маленькой копии с три раза меньше давления большой фигуры.

Установлено, что масса маленькой меньше массы большой в 27 раз	2
Записано выражение для давления – сила тяжести, деленная на площадь основания	1
Определено соотношение между давлениями	2

Если просто без объяснений записан ответ, та такие решение оцениваются в 0 баллов

5. Вес космонавта (5 баллов)

С Земли вертикально вверх стартует ракета с космонавтом на борту. Ракета движется вертикально вверх с ускорением $a = 4 \frac{M}{c^2}$. Вес космонавта равен 1,12 кН.

► Найдите массу космонавта.

Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \frac{M}{c^2}$.

РЕШЕНИЕ:

При движении вверх с ускорением a вес космонавта равен $P = m(g + a)$.

Определим массу космонавта

$$m = \frac{P}{a + g}; \quad m = \frac{1,12 \cdot 10^3}{4 + 10} = 80 \text{ кг.}$$

Сделан рисунок, правильно расставлены силы	1
Записан второй закон Ньютона	1
Определен вес	1
Найдена масса	2
Если сразу записано выражение для веса (без рисунка и второго закона Ньютона), а далее найдено все правильно, то выставляется 4 балла; Если просто записано выражение для веса, а масса не определена, то ставится 1 балл	

6. Воздушный шар (5 баллов)

Объём оболочки воздушного шара 200 кубических метров. Шар натягивает трос, которым он прикреплен к причальной мачте, с силой 400 Н. После освобождения троса шар парит на некоторой высоте. Плотность воздуха вблизи поверхности Земли, где находился шар в начале, равна 1,2 кг/м³.

► Какова плотность воздуха на этой высоте?

РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим случай, когда шарик вблизи поверхности земли привязан с помощью троса к мачте. Запишем первый закон Ньютона

$$0 = F_{Арх} - mg - T.$$

Выразим из записанного соотношения силу тяжести

$$mg = F_{Арх} - T.$$

На высоте шар парит из-за того, что действие силы тяжести скомпенсировано силой Архимеда

$$mg = F'_{Арх}.$$

Учтем то, что сила Архимеда вблизи поверхности земли равна $F_{Арх} = \rho g V$, а на высоте $F'_{Арх} = \rho' g V$, где ρ и ρ' – плотности воздуха вблизи поверхности земли и на высоте соответственно.

Для плотности ρ' получим

$$\rho' = \rho - \frac{T}{gV};$$

$$\rho' = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

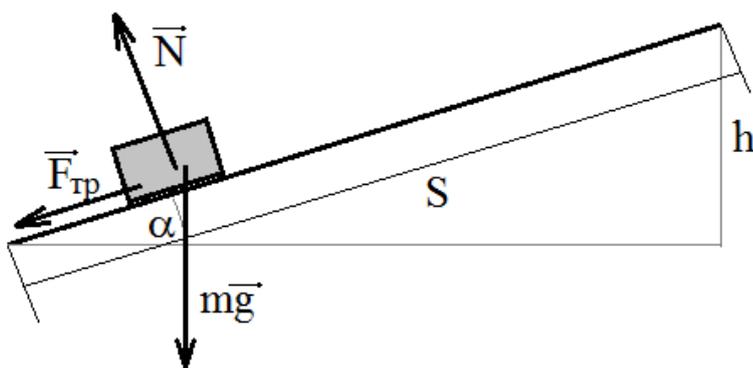
Записано условие покоя вблизи поверхности земли	1
Записано условие покоя на высоте	1
Правильно проведены все преобразования, найдена плотность, если есть правильный ответ в общем виде, а числовое значение посчитано неверно, то ставится за этот пункт 2 балла	3

7. Тело на наклонной плоскости

Тело массы m толкнули вверх по наклонной плоскости, сообщив ему начальную скорость V . Поднявшись на высоту h , оно остановилось. Угол, который плоскость образует с горизонтом, равен α .

- ▶ (1 балл) Сделайте рисунок, расставьте и назовите силы, действующие на тело.
- ▶ (2 балла) Определите ускорение тела.
- ▶ (2 балла) Посчитайте, какое количество теплоты выделилось при этом.

РЕШЕНИЕ:



Сделаем рисунок, расставим силы, действующие на тело, запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось, направленную вверх по наклонной плоскости и ось, перпендикулярную ей

$$ma = -mg \cdot \sin \alpha - kN;$$

$$N = mg \cdot \cos \alpha.$$

Из записанных соотношений определим ускорением тела

$$a = -g(\sin \alpha + k \cos \alpha).$$

Но, к сожалению коэффициент трения, нам неизвестен, поэтому определим ускорение по-другому. Путь S , который прошло тело до остановки связано с высотой h следующим соотношением

$$S = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Тогда, так как $V^2 = 2aS$, то ускорением тела равно

$$a = \frac{V^2 \sin \alpha}{2h}.$$

Для определения выделившегося тепла при движении тела, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} = A_{mp} + mgh.$$

Будем считать, что вся работа силы трения $A_{тр}$ перешла во внутреннюю энергию трущихся поверхностей, то есть в тепло Q , поэтому

$$Q = A_{тр} = m \left(\frac{V^2}{2} - gh \right).$$

Сделан рисунок, правильно расставлены и названы силы	1
Записан второй закон Ньютона и определено ускорение из него (с неизвестным коэффициентом трения) либо найден ускорение, можно без второго закона Ньютона, но оно выражено через данные в условии величины	1 2
Записан закон сохранения энергии с учетом тепла (работы силы трения)	1
Найдено тепло	1

8. Тепловой баланс

► (1 балл) Теплоемкость тела измеряется в СИ в $\frac{\text{Дж}}{\text{градус}}$. Она определяет, какое количество теплоты нужно подвести к телу (отвести от тела), чтобы нагреть (охладить) его (а не 1 килограмм) на 1 градус. Напишите соотношение между теплоемкостью тела C и удельной теплоемкостью c_0 . Масса тела равна m .
Два тела с теплоемкостями C_1 и C_2 имеют температуру $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Если первое тело нагреть до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$ и затем привести в контакт со вторым, то установится температура $t = 80^\circ\text{C}$.

► (2 балла) Определите отношение теплоемкостей тел $\frac{C_1}{C_2}$.

► (2 балла) Какая температура установится, если до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$ нагреть второе тело, а затем привести его в контакт с первым, имеющим начальную температуру $t_1 = 20^\circ\text{C}$?

РЕШЕНИЕ:

Соотношение между теплоемкостью тела, удельной теплоемкостью и массой выглядит следующим образом

$$C = c_0 \cdot m.$$

Запишем уравнение теплового баланса для первого случая

$$C_1(t_2 - t) = C_2(t - t_1).$$

Определим отсюда соотношение между теплоемкостями

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{t - t_1}{t_2 - t}; \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{80 - 20}{100 - 80} = 3.$$

Запишем уравнение теплового баланса во втором случае

$$C_1(t' - t_1) = C_2(t_2 - t').$$

Определим отсюда температуру t' , подставив найденное ранее соотношение между теплоемкостями

$$t' = \frac{3t_1 + t_2}{4};$$

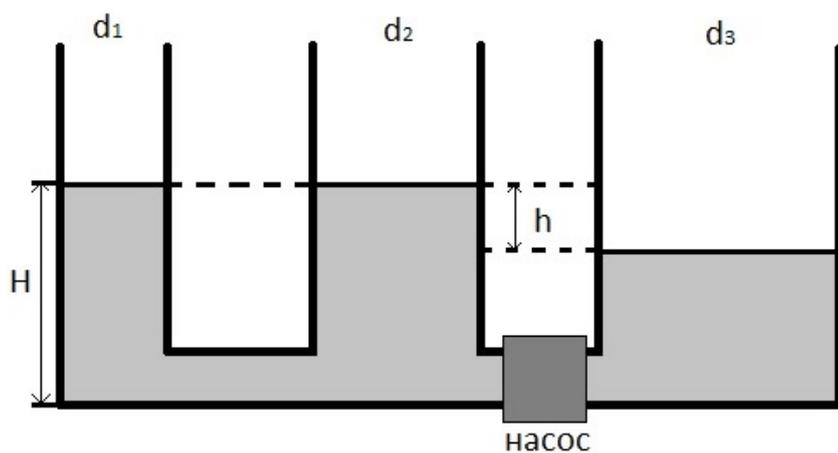
$$t' = 40^{\circ}\text{C}.$$

Правильно записано соотношение между теплоемкостью тела и удельной теплоемкостью	1
Записано уравнение теплового баланса в первом случае, либо в общем виде, либо в числах	1
Найдено соотношение между теплоемкостями тел, если нашли не то отношение (C_2/C_1), то ставить 0,5 балла вместо целого	1
Записано уравнение теплового баланса для второго случая	1
Найдена температура	1

9. Сообщающиеся сосуды

Даны три цилиндрических сообщающихся сосуда. Сосуды заполнены однородной жидкостью плотностью ρ .

Известны отношения диаметров сосудов: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{d_2}{d_3} = \frac{1}{4}$. Между сосудом 2 и



сосудом 3 находится насос, который вначале не работает (это означает, что труба между сосудами 2 и 3 закрыта перегородкой и жидкость перетекать через насос не может ни в каком направлении). Жидкость в сосудах 1 и 2 находится на одном уровне (высота от основания сосуда равна H),

а в сосуде 3 уровень жидкости расположен на h ниже. Нижняя соединительная трубка является тонкой, так что изменением давления по высоте перегородки насоса можно пренебречь.

► (2 балла) Найдите давление жидкости на перегородку насоса слева и справа.

В некоторый момент времени насос включили, и он стал перекачивать жидкость так, что уровень жидкости в сосуде 1 и 2 стал уменьшаться со скоростью u_0 .

► (3 балла) С какой скоростью стал подниматься уровень жидкости в сосуде 3? Атмосферное давление не учитывать. Жидкость несжимаема.

Примечание: объем цилиндра считается по формуле

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь поперечного сечения цилиндра, h – высота. Площадь поперечного сечения связана с радиусом трубки R , либо её диаметром d соотношением

$$S = \pi \cdot R^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

РЕШЕНИЕ:

Давление на закрытую перегородку при неработающем насосе равно слева

$$p_{\text{лев}} = \rho g H,$$

справа

$$p_{\text{прав}} = \rho g (H - h).$$

Если насос начнет работать, то за время Δt из левого и среднего колен будет откачан объем жидкости $V_0 \Delta t \left(\frac{d_1^2}{4} + \frac{1}{4} (2d_1)^2 \right) = \frac{5}{4} V_0 d_1^2 \Delta t$, такой же объем

жидкости будет закачан насосом в правое колено, если скорость прибывания жидкости в нем мы обозначим U , то для объема, закачанного в правый сосуд,

можно записать $U \Delta t \frac{(8d_1)^2}{4}$. Как уже отмечалось ранее, эти объемы одинаковы,

поэтому

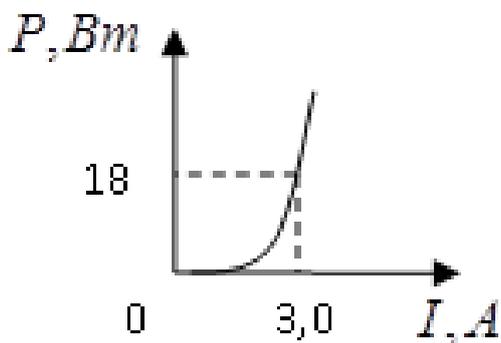
$$\frac{5}{4} V_0 d_1^2 \Delta t = U \Delta t \frac{(8d_1)^2}{4}.$$

Тогда скорость, с которой возрастает уровень жидкости в правом колене, равен

$$U = \frac{5}{64} V_0.$$

Найдено давление слева на перегородку при неработающем насосе	1
Найдено давление справа на перегородку при работающем насосе	1
Правильно записан объем, откачанный из левого и среднего колен либо за Δt , либо за 1 секунду	1
Записано выражение для объема, закачанного в правое колено либо за Δt , либо за 1 секунду	1
Найдена скорость увеличения высоты жидкости в правом колене	1

10. Мощность резистора



На рисунке изображён график зависимости мощности P , потребляемой резистором, от силы I тока в нём (график представляет собой параболу). Считая сопротивление резистора постоянным:

- ▶ (1 балл) запишите выражение для мощности, выделяющейся на резисторе;
- ▶ (2 балла) найдите сопротивление R резистора;

▶ (1 балл) найдите напряжение U_2 на резисторе при силе тока в нём $I_2 = 2,0A$;

▶ (1 балл) определите мощность P_2 , потребляемую резистором при силе тока $I_2 = 2,0A$.

РЕШЕНИЕ:

Мощность, выделяемая на резисторе сопротивлением R при силе тока через него I , равна

$$P = I^2 R.$$

График этой зависимости – парабола, она и представлена на рисунке, данном в тексте задачи.

Выразим сопротивление резистора

$$R = \frac{P}{I^2}.$$

По графику определяем, что при силе тока 3 А , выделяемая мощность равна 18 Вт , поэтому сопротивление равно

$$R = \frac{18}{3^2} = 2 \text{ Ом}.$$

Для определения напряжения на резисторе при силе тока в нём 2 А воспользуемся законом Ома

$$U = I \cdot R;$$

$$U = 2 \cdot 2 = 4 \text{ В}.$$

При силе тока 2 А будет выделяться мощность, равная

$$P_2 = 2^2 \cdot 2 = 8 \text{ Вт}.$$

Записано выражение для мощности	1
По графику определено сопротивление	2
Найдено напряжение при силе тока 2 А	1
Найдена мощность при силе тока 2 А	1