B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	C1	C2	C3	C4	Сумма

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительная работа по математике
для поступающих в 10 физико-химический и химико-биологический классы
СУНЦ УрФУ
1 мая 2017 года
Вариант 1

Часть B

К каждому заданию приведите только ответ

B1. *(2 балла)* Вычислите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{14}+\sqrt{6})(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}$.

Ответ:______________

B2. *(2 балла)* Решите уравнение $\dfrac{|x-1|}{x}=2$.

Ответ:______________

B3. *(2 балла)* Какой угол в градусах образуют минутная и часовая стрелки в семь часов утра?

Ответ:______________

B4. *(2 балла)* Сумма двух чисел равна 24. Найдите меньшее из них, если 35% одного из них равны 85% другого.

Ответ:______________

B5. *(2 балла)* Найдите значение выражения $\dfrac{3x+2y+z}{2x-3y-z}$, если $x:y:z=2:1:3$.

Ответ:______________

B6. *(2 балла)* Из середины D катета AC прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр DE к гипотенузе AB. Найдите длину AB, если $DE=4$, $AE=3$.

Ответ:______________

B7. *(2 балла)* Парабола $y=x^2+x+a$ и прямая $y=ax+1$ имеют единственную общую точку. Найдите значение a.

Ответ:______________

B8. *(2 балла)* Вычислите значение выражения $2^{16}-(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$.

Ответ:______________

Часть C

К заданиям приведите полное решение.

C1. *(8 баллов)* Решите неравенство: $\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+2}>\dfrac{x^3-x}{x+2}$.

C2. *(8 баллов)* Решите уравнение $2x^4-5x^3-18x^2+45x=0$.

C3. *(9 баллов)* Один из корней квадратного уравнения $x^2+2x+q=0$ в 6 раз больше другого. Найдите эти корни и значение q.

C4. *(9 баллов)* Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, перпендикулярны. Меньшее основание трапеции равно 2, а боковая сторона равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь трапеции.

Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	C1	C2	C3	C4	Сумма

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительная работа по математике
для поступающих в 10 физико-химический и химико-биологический классы
СУНЦ УрФУ
1 мая 2017 года
Вариант 2
Часть B

К каждому заданию приведите только ответ

B1. *(2 балла)* Вычислите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{40}-7)\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{15}-\sqrt{6}}$.

Ответ:_______________

B2. *(2 балла)* Решите уравнение $\dfrac{|x+1|}{x}=3$.

Ответ:_______________

B3. *(2 балла)* Какой угол в градусах образуют минутная и часовая стрелки в четыре часа утра?

Ответ:_______________

B4. *(2 балла)* Разность двух чисел равна 6. Найдите большее из них, если 25% одного из них равны 85% другого.

Ответ:_______________

B5. *(2 балла)* Найдите значение выражения $\dfrac{z+2y-4x}{5x-3y+8z}$, если $x:y:z=3:1:2$.

Ответ:_______________

B6. *(2 балла)* Из середины E гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр EK к гипотенузе. Найдите длину катета BC, если $AK=5$, $KE=4$.

Ответ:_______________

B7. *(2 балла)* Парабола $y=x^2+x-a$ и прямая $y=ax-1$ имеют единственную общую точку. Найдите значение a.

Ответ:_______________

B8. *(2 балла)* Вычислите значение выражения $2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)-3^{16}$.

Ответ:_______________

Часть C

К заданиям приведите полное решение.

C1. *(8 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{(x-3)^3}{x-2}<\dfrac{x^3-9x^2}{x-2}$.

C2. *(8 баллов)* Решите уравнение $2x^4+3x^3-8x^2-12x=0$.

C3. *(9 баллов)* Один из корней квадратного уравнения $x^2-x+q=0$ на 4 больше другого. Найдите эти корни и значение q.

C4. *(9 баллов)* Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, перпендикулярны. Большее основание трапеции равно 10, а боковая сторона равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь трапеции.

Вариант 1: ответы и решения к части B

B1. *(2 балла)* Вычислите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{14}+\sqrt{6})(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}$.

Выполним преобразования:

$$\frac{(\sqrt{14}+\sqrt{6})(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}\sqrt{3}-5)}{\sqrt{7-2\sqrt{7}\sqrt{3}+3}}=$$

$$\frac{\sqrt{2}(7\sqrt{3}+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}-5\sqrt{3})}{\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{7})}{|\sqrt{7}-\sqrt{3}|}=\frac{-2\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=-2\sqrt{2}.$$

Ответ: $-2\sqrt{2}$.

B2. *(2 балла)* Решите уравнение $\frac{|x-1|}{x}=2$.

Найдем ОДЗ уравнения: $x\neq 0$. Далее рассмотрим 2 случая раскрытия модуля.

При $x-1\geqslant 0$ решим уравнение $x-1=2x$, откуда $x=-1$. Этот корень не удовлетворяет условию $x-1\geqslant 0$, т. е. он — посторонний.

При $x-1<0$, получаем $-x+1=2x$, откуда $x=\frac{1}{3}$ является единственным решением данного уравнения.

Ответ: $x=\frac{1}{3}$.

B3. *(2 балла)* Какой угол в градусах образуют минутная и часовая стрелки в семь часов утра?

В час ночи угол между стрелками 30°. В семь часов утра маленькая стрелка показывает на 7, а большая на 12. Между 7 и 12 пять углов в 30°, поэтому искомый угол равен $5\cdot 30^\circ=150^\circ$.

Ответ: 150°.

B4. *(2 балла)* Сумма двух чисел равна 24. Найдите меньшее из них, если 35% одного из них равны 85% другого.

Пусть x и y — искомые числа. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} x+y=24,\\ 0,35x=0,85y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24-y,\\ 7x=17y. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение, получим $7(24-y)=17y$, откуда $7\cdot 24=24y$ или $y=7$ и $x=17$. Наименьшим числом будет 7.

Ответ: 7.

B5. *(2 балла)* Найдите значение выражения $\dfrac{3x+2y+z}{2x-3y-z}$, если $x:y:z=2:1:3$.

Из соотношения $x:y:z=2:1:3$ получаем $x=2y$ и $z=3y$. Подставим эти выражения в алгебраическую дробь: $\dfrac{6y+2y+3y}{4y-3y-3y}=\dfrac{11y}{-2y}=-\dfrac{11}{2}$.

Ответ: $-\frac{11}{2}$.

B6. *(2 балла)* Из середины D катета AC прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр DE к гипотенузе AB. Найдите длину AB, если $DE=4$, $AE=3$.

В треугольнике ADE угол E равен 90°, гипотенуза AD равна $\sqrt{3^2+4^2}=5$, поэтому $AC=10$. Треугольник ADE подобен треугольнику ACB, так как $\angle E=\angle C=90^\circ$ и $\angle A$ общий, значит $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$. Подставим числовые значения $\frac{AB}{5}=\frac{10}{3}$ и получим $AB=\frac{50}{3}$.

Ответ: $AB=\frac{50}{3}$.

B7. *(2 балла)* Парабола $y=x^2+x+a$ и прямая $y=ax+1$ имеют единственную общую точку. Найдите значение a.

Координаты точек пересечения являются решениями системы: $\begin{cases} y=x^2+x+a, \\ y=ax+1. \end{cases}$

Приравнивая правые части, приходим к $x^2+x+a=ax+1$ или $x^2+(1-a)x+a-1=0$. Дискриминантом этого уравнения будет $D=(1-a)^2-4(a-1)=1-2a+a^2-4a+4=a^2-6a+5$. Единственное решение у квадратного уравнения будет при $D=0$. Откуда $a^2-6a+5=0$, с корнями $a_1=1$ и $a_2=5$. При $a=1$ или $a=5$ парабола и прямая имеют единственную общую точку.

Ответ: $a=1$ или $a=5$.

B8. *(2 балла)* Вычислите значение выражения $2^{16}-(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$.

Конечно, можно провести вычисления, возводя число 2 в нужную степень, но мы рассмотрим другое решение. Домножим вычитаемое на 1, запишем эту единицу в виде разности $2-1$. Используя формулу разности квадратов, преобразуем произведение, начиная с первых двух скобок:

$$(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)=$$
$$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)=(2^8-1)(2^8+1)=2^{16}-1.$$

Подставим этот результат в первоначальную разность: $2^{16}-(2^{16}-1)=1$.

Ответ: 1.

Вариант 1: решения и ответы к части C

C1. *(8 баллов)* Решите неравенство: $\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+2}>\dfrac{x^3-x}{x+2}$.

Заметим, что в числителе первой дроби можно применить формулу суммы кубов. Далее перенесем всё в левую часть и приведем к общему знаменателю.

$$\frac{x^3+1}{x+2}>\frac{x^3-x}{x+2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^3+1-x^3+x}{x+2}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+1}{x+2}>0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности: $x<-2$ или $x>-1$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.

Критерии оценивания. ОДЗ — 1 балл. Правильно раскрытые скобки — 2 балла. Приведение к одной дроби — 1 балл. Правильное сведение к совокупности систем (или метод интервалов) — 3 балла. Верный ответ — 1 балл.

C2. *(8 баллов)* Решите уравнение $2x^4-5x^3-18x^2+45x=0$.

После очевидного преобразования $x(2x^3-5x^2-18x+45)=0$ сгруппируем в скобках первое слагаемое с третьим и второе — с четвертым $x(2x(x^2-9)-5(x^2-9))=0$. Теперь можно вынести общий множитель за скобки $x(x^2-9)(2x-5)=0$ и окончательно получить $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm3$, $x_4=\frac{5}{2}$.

Критерии оценивания. Вынесение x за скобки — 1 балл. Разложение на множители — 3 балла. Нахождение корней — 4 балла (по одному баллу за каждый из корней).

С3. *(9 баллов)* Один из корней квадратного уравнения $x^2+2x+q=0$ в 6 раз больше другого. Найдите эти корни и значение q.

Используя теорему Виета, запишем условие задачи в виде системы $\begin{cases} x_1+x_2=-2, \\ x_1\cdot x_2=q, \\ x_1=6x_2. \end{cases}$

Выразим $x_1=-2-x_2$ из первого уравнения и подставим в третье. Получим $-2-x_2=6x_2$ или $7x_2=-2$. Откуда

$$x_2=-\frac{2}{7}, \quad x_1=-2-\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{12}{7}.$$

Перемножив корни, получим $q=\frac{24}{49}$.

Ответ: $x_1=-\frac{12}{7}$, $x_2=-\frac{2}{7}$, $q=\frac{24}{49}$.

Критерии оценивания. Верно составленная система (теорема Виета или формулы корней квадратного уравнения и условие на дискриминант) — 4 балла. Правильное решение системы — 2 балла. Нахождение корней и значения параметра — 3 балла.

С4. *(9 баллов)* Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции перпендикулярны. Меньшее основание трапеции равно 2, а боковая сторона равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь трапеции.

Трапеция $ABCD$ равнобедренная и угол E равен $90°$, поэтому треугольник BEC является равнобедренным прямоугольным треугольником. Пусть $EC=BE=x$, тогда по теореме Пифагора $2x^2=2^2$ или $x=\sqrt{2}$ и $ED=3\sqrt{2}$. Треугольник AED также является равнобедренным и прямоугольным. Отсюда $AD^2=2ED^2=2\cdot(3\sqrt{2})^2$ или $AD=6$.

Пусть CH — высота трапеции. В любой равнобедренной трапеции справедливо $DH=\frac{AD-BC}{2}$, поэтому $DH=2$. Учитывая, что в треугольнике CDH угол $H=90°$ и угол $D=45°$, получим $CH=HD=2$. Отсюда $S=\frac{2+6}{2}\cdot 2=8$.

Ответ: 8.

Критерии оценивания. Установление равнобедренности треугольника — 2 балла. Нахождение расстояния от вершины трапеции до точки пересечения боковых сторон — 2 балла. Правильно найденное второе основание трапеции — 2 балла. Нахождение площади — 3 балла.

Вариант 2: ответы к части B

B1. $-\sqrt{3}$. **B2.** $\frac{1}{2}$. **B3.** $120°$. **B4.** $8,5$. **B5.** $-\frac{2}{7}$. **B6.** $\frac{24}{5}$ или $\frac{18}{5}$. **B7.** $a=-3$ или $a=1$. **B8.** $y=-1$.

Вариант 2: ответы к части C

C1. $x\in(1,2)$. **C2.** $x=0$, $x=\pm2$, $x=-\frac{3}{2}$. **C3.** $x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $q=-\frac{15}{4}$. **C4.** $S=21$.