Летняя школа — 2017
Итоговая контрольная по математике

1 вариант

1. *(9 баллов)* Из 7 математиков и 6 физиков нужно создать комиссию из 4 человек для приема экзаменов. Сколькими способами это можно сделать, если в комиссии должно быть

а) *(3 балла)* ровно 2 математика;

б) *(6 баллов)* хотя бы 2 математика?

2. *(6 баллов)* Из первой сотни натуральных чисел выбрали 51 число (все числа различны). Докажите, что среди выбранных обязательно найдутся два числа, отличающиеся на 1.

3. *(5 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{(x^2-4x+3)(x-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-8x+16}} \geqslant 0.$

4. а) *(7 баллов)* Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{(y^2-2y+1)\,(y-2-|x-3|)}{x-3} \geqslant 0.$$

б) *(8 баллов)* Для каждого значения параметра b решите неравенство

$$\frac{(b^2-2b+1)\,(b-2-|x-3|)}{x-3} \geqslant 0.$$

5. *(5 баллов)* Из точки P проведены касательные PA и PB к окружности с центром O (A и B — точки касания). BC — диаметр окружности. Докажите, что $(AC)\|(PO)$.

6. *(10 баллов)* Параллелограмм $ABCD$ и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, сторона CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) *(4 балла)* Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) *(6 баллов)* Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP=2$, $BC=12$ и $BQ=8$.

Летняя школа — 2017
Итоговая контрольная по математике

2 вариант

1. *(9 баллов)* На гуманитарной кафедре есть четыре преподавателя истории, два преподавателя ИМК, три преподавателя обществознания. Сколькими способами можно составить комиссию из 5 человек для приема экзамена в гуманитарный класс так, чтобы в комиссию входило

а) *(3 балла)* 2 историка, один преподаватель ИМК и 2 преподавателя обществознания;

б) *(6 баллов)* хотя бы два историка?

2. *(6 баллов)* Из первой сотни натуральных чисел выбрали 52 различных натуральных числа. Докажите, что сумма каких-то двух из них будет равна 100.

3. *(5 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{(x^2+x-2)(x-1)}{(x-2)\sqrt{x^2+6x+9}} \geqslant 0.$

4. а) *(7 баллов)* Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{(y^2-6y+9)(y-1+|x-2|)}{x-2} \leqslant 0.$$

б) *(8 баллов)* Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\frac{(a^2-6a+9)(a-1+|x-2|)}{x-2} \leqslant 0.$$

5. *(5 баллов)* Из точки P проведены касательные PA и PB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Точка C выбрана на окружности так, что $(AC)\|(PO)$. Докажите, что $[BC]$ — диаметр окружности.

6. *(10 баллов)* Окружность проходит через вершины A и B параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AD и BC соответственно в точках M и N и касается стороны CD.

а) *(4 балла)* Докажите, что точки C, D, M и N лежат на одной окружности.

б) *(6 баллов)* Найдите длину отрезка BM, если известно, что $DM = 2$, $CN = 8$ и $BC = 9$.

Решения и критерии оценки

1 вариант

1. *(9 баллов)* Из 7 математиков и 6 физиков нужно создать комиссию из 4 человек для приема экзаменов. Сколькими способами это можно сделать, если в комиссии должно быть

а) *(3 балла)* ровно 2 математика;

б) *(6 баллов)* хотя бы 2 математика?

Решение. а) Двух математиков из семи можно выбрать C_7^2 способами, тогда на оставшиеся 2 места есть C_6^2 способов выбрать двух физиков. Используя правило произведения, получаем $C_7^2 \cdot C_6^2 = \dfrac{7!}{5!2!} \cdot \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 315$ способов.

б) Можно решить эту задачу двумя методами.

1-й метод. Слова «хотя бы 2 математика» подразумевают, что в комиссии может быть 2 математика, 3 математика или все 4 члена комиссии являются математиками. Аналогично пункту а) получаем количество способов для двух математиков $C_7^2 \cdot C_6^2$, для трех – $C_7^3 \cdot C_6^1$ и, когда все члены комиссии математики, C_7^4 способов. Так как все эти способы найдены для разного вида комиссий, то полученные результаты нужно сложить. Получим итоговый ответ: $C_7^2 \cdot C_6^2 + C_7^3 \cdot C_6^1 + C_7^4 = \dfrac{7!}{5!2!} \cdot \dfrac{6!}{4!2!} + \dfrac{7!}{4!3!} \cdot \dfrac{6!}{5!1!} + \dfrac{7!}{4!3!} =$ $= 315 + 210 + 35 = 560$ способов.

2-й метод. Вычислим количество способов, когда в комиссии менее двух математиков. Тогда либо в нее входит только один математик, либо комиссия состоит только из физиков. В первом случае получаем $C_7^1 \cdot C_6^3$ способов составить комиссию, во втором – C_6^4 способов. Вычтем найденные результаты из общего числа способов составить комиссию численностью 4 человека из 13 кандидатов. Получим итоговый ответ: $C_{13}^4 - C_7^1 \cdot C_6^3 - C_6^4 = \dfrac{13!}{9!4!} - \dfrac{7!}{6!1!} \cdot \dfrac{6!}{3!3!} - \dfrac{6!}{4!2!} = 560$ способов.

Ответ. а) 315, б) 560.

Критерии оценки (всего 9 баллов). а) 2 балла – верно найдено число способов выбора нужного количества каждого предметника; 1 балл – применение правила произведения.

б) 2 балла – найдено число способов, когда в комиссию входит 1 математик; 2 балла – найдено число способов, когда комиссия не содержит математиков; 1 балл – найдено общее число способов создать комиссию; 1 балл – получен итоговый результат.

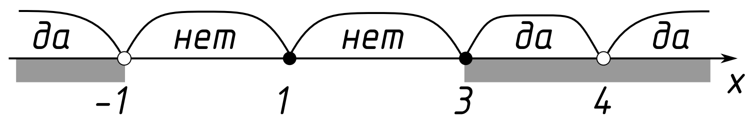
2. *(6 баллов)* Из первой сотни натуральных чисел выбрали 51 число (все числа различны). Докажите, что среди выбранных обязательно найдутся два числа, отличающиеся на 1.

Решение. Разобьем все числа первой сотни на следующие пары: $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\ldots$, $\{99, 100\}$. Так как выбрано 51 число, а полученных пар всего 50, то по принципу Дирихле найдется хотя бы два числа из одной пары, а в каждой паре числа отличаются на 1.

Критерии оценки (всего 6 баллов). 4 балла – найдено разбиение всех чисел на группы (определены «клетки» ПД); 2 балла – обоснованное применение ПД.

3. *(5 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{(x^2-4x+3)(x-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-8x+16}} \geqslant 0$.

Решение. Переписав левую часть неравенства в виде $\dfrac{(x-3)(x-1)^2}{(x+1)|x-4|}$, найдем корни числителя и знаменателя и нанесем их на числовую прямую.



Поскольку неравенство нестрогое, корни числителя изобразим «закрашенными» точками; корни знаменателя в любом случае изобразим «выколотыми» точками. Заметим, что при переходе аргумента через точки -1 и 3 знак левой части неравенства меняется на противоположный, а при переходе через точки 1 и 4 — не меняется. Определив знак левой части на одном из промежутков, расставим на промежутках слова «да» (неравенство верно) и «нет» (неравенство неверно). Отметим, что в точке 1 неравенство верно. Точку 4 не забудем исключить из ответа.

Ответ. $(-\infty;-1)\cup\{1\}\cup[3;4)\cup(4;+\infty)$.

Критерии оценки (всего 5 баллов). Правильно найдены корни числителя и знаменателя — 1 балл. Правильно определены знаки на промежутках — 2 балла. Не потерян изолированный корень — 1 балл. Правильно расставлены и учтены в ответе выколотые точки — 1 балл.

4. а) *(7 баллов)* Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{(y^2-2y+1)(y-2-|x-3|)}{x-3} \geqslant 0.$$

б) *(8 баллов)* Для каждого значения параметра b решите неравенство

$$\frac{(b^2-2b+1)(b-2-|x-3|)}{x-3} \geqslant 0.$$

Решение. а) Изобразим на рис. 1 линии $y=1$, $y=2+|x-3|$ и $x=3$ (последняя линяя — штриховая). Они разбивают плоскость на 6 областей.

Взяв в каждой области по точке, выясним, верно или неверно исходное неравенство; те области, в которых неравенство верно, закрасим (на рис. 1 залиты желтым цветом). Отметим, что координаты всех точек прямой $y=1$, кроме точки $(3;1)$, удовлетворяют неравенству.

Ответ. Области, залитые на рис. 1 желтым цветом, и часть прямой $y=1$ с абсциссами, большими 3.

Критерии оценки (всего 7 баллов). Правильно построены линии (в том числе вертикальная — штриховой) — 3 балла. Правильно закрашены области — 2 балла.

Правильно отмечены выколотые точки — 1 балл. В ответе не потеряна полупрямая $y = 1,\ x > 3$ — 1 балл.

б) Рассматривая всевозможные прямые $y = b$, будем находить пересечение каждой такой прямой с полученным в предыдущей задаче множеством. Абсциссы точек, входящих в это пересечение, и дадут нам ответ.

Ответ. Если $b < 1$, то $x < 3$; если $b = 1$, то $x \in (-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; если $1 < b \leqslant 2$, то $x < 3$; если $b > 2$, то $x \in (-\infty;\ 5 - b] \cup (3;\ b + 1]$.

Критерии оценки (всего 8 баллов). За верно написанный ответ в каждом из 4 случаев — по 2 балла. Если перепутаны круглые и квадратные скобки — 1 балл.

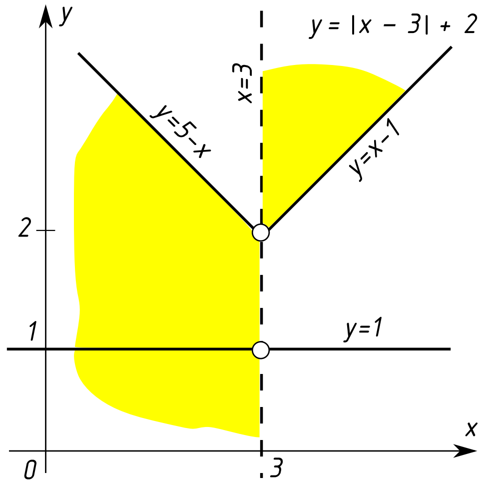


Рис. 1

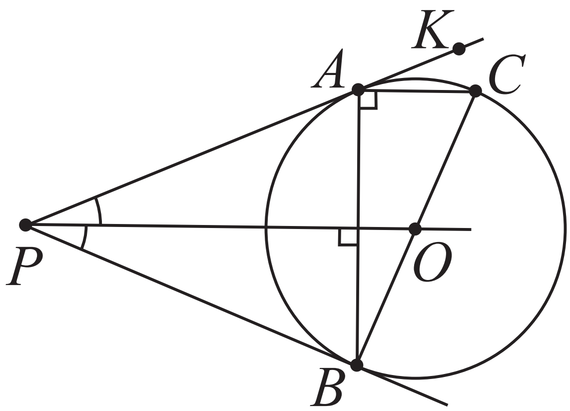


Рис. 2

5. *(5 баллов)* Из точки P проведены касательные PA и PB к окружности с центром O (A и B — точки касания). BC — диаметр окружности. Докажите, что $(AC) \| (PO)$.

Решение. Будем использовать обозначения рис. 2. Отрезки PA и PB равны друг другу, как отрезки касательных, проведенных из одной точки, поэтому треугольник PAB равнобедренный и биссектриса PO перпендикулярна стороне AB. По условию отрезок BC — диаметр окружности, отсюда $\angle BAC = 90^\circ$. Таким образом, прямые PO и AC перпендикулярны одной прямой AB (и лежат в одной плоскости), что дает $(AC) \| (PO)$.

Критерии оценки (всего 5 баллов). По 2 балла за доказательство $(PO) \perp (AB)$ и $(AC) \perp (AB)$; 1 балл — правильное следствие из предыдущих двух фактов.

6. *(10 баллов)* Параллелограмм $ABCD$ и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, сторона CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) *(4 балла)* Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) *(6 баллов)* Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP = 2$, $BC = 12$ и $BQ = 8$.

Решение. а) Воспользуемся обозначениями рис. 3.

Около четырехугольника $CDPQ$ описана окружность, поэтому $\angle CDP + \angle CQP = 180^\circ$. Для смежных углов выполняется $\angle BQP + \angle CQP = 180^\circ$. Из последних двух равенств следует, что $\angle BQP = \angle CDP = \angle D \quad (*)$. В параллелограмме $ABCD$ верно $\angle D + \angle A = 180^\circ$. Используя $(*)$, перепишем последнее равенство в виде $\angle BQP + \angle A = 180^\circ$, что гарантирует существование окружности, описанной около четырехугольника $ABQP$.

Критерии оценки (всего 4 балла). По одному баллу за знание свойства односторонних углов и критерия вписанности четырехугольника в окружность. 2 балла — за доказательство $\angle BQP = \angle D$.

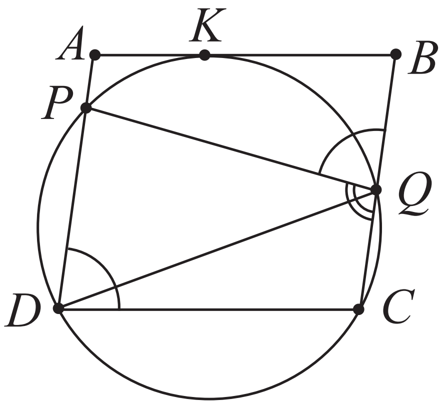


Рис. 3

б) Продолжаем использовать обозначения рис. 3. Из точки A проведена касательная AK и секущая AD, поэтому $AK^2 = AP \cdot AD = 24$ и $AK = 2\sqrt{6}$. Аналогично получаем $KB^2 = BQ \cdot BC = 96$ и $KB = 4\sqrt{6}$. Учитывая, что вписанная в окружность трапеция $DCQP$ является равнобедренной, получим $PQ = CD = AB = 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$. Из условия задачи находим $PD = BC - AP = 10$ и в равнобедренной трапеции $DCQP$ стали известны все стороны. Дважды применяя теорему Пифагора, получим наконец $DQ = 16$.

Ответ. $DQ = 16$.

Критерии оценки (всего 6 баллов). По 2 балла — за правильное определение отрезков касательных; 2 балла — за нахождение диагонали равнобедренной трапеции с известными сторонами.

Решения и критерии оценки

2 вариант

1. *(9 баллов)* На гуманитарной кафедре есть четыре преподавателя истории, два преподавателя ИМК, три преподавателя обществознания. Сколькими способами можно составить комиссию из 5 человек для приема экзамена в гуманитарный класс так, чтобы в комиссию входило

а) *(3 балла)* 2 историка, один преподаватель ИМК и 2 преподавателя обществознания;

б) *(6 баллов)* хотя бы два историка?

Решение. а) Двух из четырех историков можно выбрать C_4^2 способами, аналогично 2 преподавателей обществознания можно выбрать C_3^2 способами и одного преподавателя ИМК – C_2^1 способами. Используя правило произведения, получаем, что приемную комиссию можно выбрать $C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^2 = 36$ способами.

б) Вычислим количество способов, когда в комиссии менее двух историков. Тогда либо в нее входит один историк, либо комиссия вообще не содержит преподавателей истории. В первом случае получаем $C_4^1 \cdot C_5^4$ способов составить комиссию, во втором – C_5^5 способов. Вычтем найденные результаты из общего числа способов составить комиссию численностью 5 человек из 9 кандидатов. Получим итоговый ответ: $C_9^5 - C_4^1 \cdot C_5^4 - C_5^5 = 105$ способов.

Ответ. а) 36, б) 105.

Критерии оценки (всего 9 баллов). а) 2 балла – верно найдено число способов выбора нужного количества каждого предметника; 1 балл – применение правила произведения.

б) 2 балла – найдено число способов, когда в комиссию входит 1 историк; 2 балла – найдено число способов, когда комиссия не содержит историков; 1 балл – найдено общее число способов создать комиссию; 1 балл – получен итоговый результат.

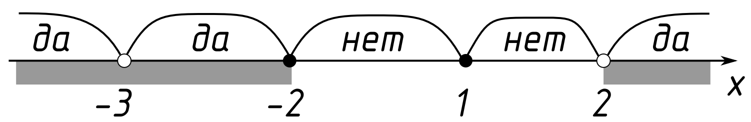
2. *(6 баллов)* Из первой сотни натуральных чисел выбрали 52 различных натуральных числа. Докажите, что сумма каких-то двух из них будет равна 100.

Решение. Составим следующие 49 пар чисел: $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, $\ldots$, $\{49, 51\}$. В них отсутствуют числа 50 и 100, но даже если эти числа находятся среди выбранных 52, то остается 50 чисел, из которых по меньшей мере какие-то два попадают в одну из пар. Следовательно, сумма этих чисел будет равна 100.

Критерии оценки (всего 6 баллов). 4 балла – найдено разбиение всех чисел на группы (определены «клетки» ПД); 2 балла – обоснованное применение ПД.

3. *(5 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{(x^2+x-2)(x-1)}{(x-2)\sqrt{x^2+6x+9}} \geqslant 0$.

Решение. Переписав левую часть неравенства в виде $\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{(x-2)|x+3|}$, найдем корни числителя и знаменателя и нанесем их на числовую прямую.



Поскольку неравенство нестрогое, корни числителя изобразим «закрашенными» точками; корни знаменателя в любом случае изобразим «выколотыми» точками. Заметим, что при переходе аргумента через точки -2 и 2 знак левой части неравенства меняется на противоположный, а при переходе через точки -3 и 1 — не меняется. Определив знак левой части на одном из промежутков, расставим на промежутках слова «да» (неравенство верно) и «нет» (неравенство неверно). Отметим, что в точке 1 неравенство верно. Точку -3 не забудем исключить из ответа.

Ответ. $(-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.

Критерии оценки (всего 5 баллов). Правильно найдены корни числителя и знаменателя — 1 балл. Правильно определены знаки на промежутках — 2 балла. Не потерян изолированный корень — 1 балл. Правильно расставлены и учтены в ответе выколотые точки — 1 балл.

4. а) *(7 баллов)* Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{(y^2-6y+9)\,(y-1+|x-2|)}{x-2} \leqslant 0.$$

б) *(8 баллов)* Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\frac{(a^2-6a+9)\,(a-1+|x-2|)}{x-2} \leqslant 0.$$

Решение. а) Изобразим на рис. 4 линии $y=3$, $y=1-|x-2|$ и $x=2$ (последняя линяя — штриховая). Они разбивают плоскость на 6 областей.

Взяв в каждой области по точке, выясним, верно или неверно исходное неравенство; те области, в которых неравенство верно, закрасим (на рис. 4 залиты желтым цветом). Отметим, что координаты всех точек прямой $y=3$, кроме точки $(2;3)$, удовлетворяют неравенству.

Ответ. Области, залитые на рис. 4 желтым цветом, и часть прямой $y=3$ с абсциссами, большими 2.

Критерии оценки (всего 7 баллов). Правильно построены линии (в том числе вертикальная — штриховой) — 3 балла. Правильно закрашены области — 2 балла. Правильно отмечены выколотые точки — 1 балл. В ответе не потеряна полупрямая $y=3,\ x>2$ — 1 балл.

б) Рассматривая всевозможные прямые $y=a$, будем находить пересечение каждой такой прямой с полученным в предыдущей задаче множеством. Абсциссы точек, входящих в это пересечение, и дадут нам ответ.

Ответ. Если $a<1$, то $x\in(-\infty;\ a+1]\cup(2;\ 3-a]$; если $1\leqslant a<3$, то $x<2$; если $a=3$, то $x\in(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; если $a>3$, то $x<2$.

Критерии оценки (всего 8 баллов). За верно написанный ответ в каждом из 4 случаев — по 2 балла. Если перепутаны круглые и квадратные скобки — 1 балл.

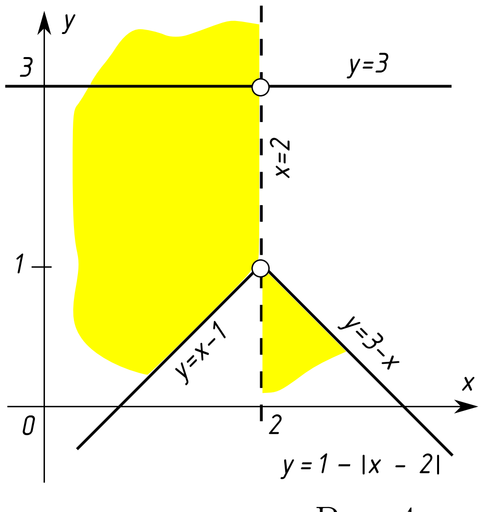


Рис. 4

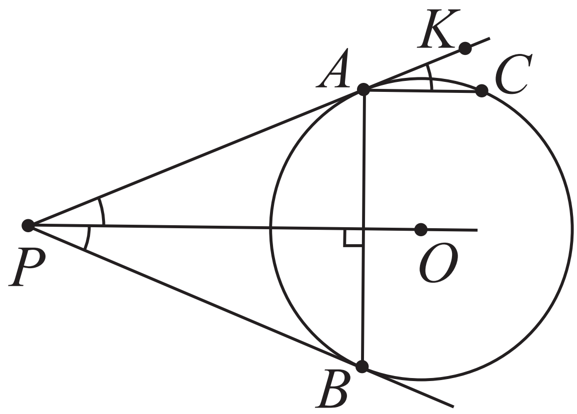


Рис. 5

5. *(5 баллов)* Из точки P проведены касательные PA и PB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Точка C выбрана на окружности так, что $(AC)\|(PO)$. Докажите, что $[BC]$ — диаметр окружности.

Решение. Будем использовать обозначения рис. 5. Отрезки PA и PB равны друг другу, как отрезки касательных, проведенных из одной точки, поэтому треугольник PAB равнобедренный и биссектриса PO перпендикулярна стороне AB. По условию $(AC)\|(PO)$, что дает $(AC)\perp(AB)$. Условие $\angle BAC = 90^\circ$ равносильно тому, что отрезок BC — диаметр данной окружности.

Критерии оценки (всего 5 баллов). По 2 балла за доказательство $(PO)\perp(AB)$ и $(AC)\perp(AB)$; 1 балл — правильное следствие из предыдущих двух фактов с учетом свойств прямых улов, вписанных в окружность.

6. *(10 баллов)* Окружность проходит через вершины A и B параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AD и BC соответственно в точках M и N и касается стороны CD.

а) *(4 балла)* Докажите, что точки C, D, M и N лежат на одной окружности.

б) *(6 баллов)* Найдите длину отрезка BM, если известно, что $DM = 2$, $CN = 8$ и $BC = 9$.

Решение. а) Воспользуемся обозначениями рис. 6. Около четырехугольника $AMNB$ описана окружность, поэтому $\angle BAM + \angle BNM = 180^\circ$. Для смежных углов выполняется $\angle BNM + \angle CNM = 180^\circ$. Из последних двух равенств следует, что $\angle CNM = \angle BAM = \angle A$ $(**)$. В параллелограмме $ABCD$ выполняется $\angle D + \angle A = 180^\circ$. Используя $(**)$, перепишем последнее равенство в виде $\angle CNM + \angle D = 180^\circ$, что гарантирует существование окружности, описанной около четырехугольника $CDMN$.

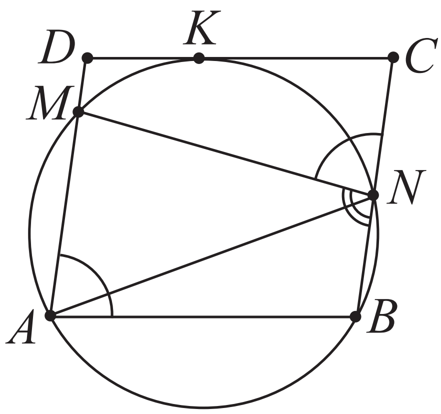


Рис. 6

Критерии оценки (всего 4 балла). По одному баллу за знание свойства односторонних углов и критерия вписанности четырехугольника в окружность. 2 балла — за доказательство $\angle CNM = \angle A$.

б) Продолжаем использовать обозначения рис. 6. Из точки D проведена касательная DK и секущая DA, поэтому $DK^2 = DA \cdot DM = 18$ и $DK = 3\sqrt{2}$. Аналогично получаем $CK^2 = CN \cdot CB = 72$ и $CK = 6\sqrt{2}$. Учитывая, что вписанная в окружность трапеция $ABNM$ является равнобедренной, получим $MN = AB = CD = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$. Из условия задачи $AM = BC - DM = 7$ и в равнобедренной трапеции $ABNM$ стали известны все стороны. Дважды применяя теорему Пифагора, находим $BM = 13$.

Ответ. $BM = 13$.

Критерии оценки (всего 6 баллов). По 2 балла — за правильное определение отрезков касательных; 2 балла — за нахождение диагонали равнобедренной трапеции с известными сторонами.