Геометрия ЛШ–2017

1 вариант

1. *(4 балла)* Продолжения хорд CB и ED окружности ω пересекаются в точке A, причем $B \in [AC]$ и $D \in [AE]$. Известно, что $\angle BAD = 30^\circ$ и градусные величины дуг CB, BD и DE относятся соответственно как $2:1:2$. Найдите величину угла CDE.

2. *(5 баллов)* Окружность ω касается катетов прямоугольного треугольника ABC и пересекает гипотенузу AB в точках P и Q. Найдите радиус этой окружности, если $AP = 2$, $PQ = 6$ и $AC = 8$.

3. *(6 баллов)* Окружность с центром O, вписанная в треугольник MPQ, касается его сторон MP, MQ и PQ в точках A, C и B соответственно. Биссектриса угла M пересекает эту окружность в точке D, лежащей внутри треугольника MAC. Докажите, что AD — биссектриса угла MAC.

Геометрия ЛШ–2017

2 вариант

1. *(4 балла)* На окружности последовательно выбраны точки A, B, C и D. Хорды AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что $\angle AMD = 60^\circ$ и градусные величины дуг AB, BC и CD относятся соответственно как $3:1:5$. Найдите величину угла ACD.

2. *(5 баллов)* Окружность ω радиуса 6 касается катетов прямоугольного треугольника ABC и пересекает гипотенузу AB в точках P и Q (причем $P \in [AQ]$). Найдите длину AP, если $PQ = 9$ и $AC = 12$.

3. *(6 баллов)* Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q, лежащей внутри треугольника AB_1C_1. Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1.

Решения и критерии оценки

1 вариант

1. *(4 балла)* Продолжения хорд CB и ED окружности ω пересекаются в точке A, причем $B \in [AC]$ и $D \in [AE]$. Известно, что $\angle BAD = 30°$ и градусные величины дуг CB, BD и DE относятся соответственно как $2:1:2$. Найдите величину угла CDE.

Решение. Будем использовать обозначения рисунка 1. Учитывая, что вершина угла BAD лежит вне окружности, имеем $(y-x)/2 = 30°$ или $y - x = 60°$ (из условий задачи следует, что величина дуги CE больше величины дуги BD). Кроме того, $5x + y = 360°$. Из системы уравнений

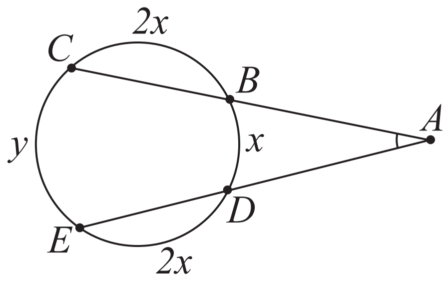

Рис. 1

$$\begin{cases} y - x = 60°, \\ 5x + y = 360° \end{cases}$$

находим $y = 110°$ и $x = 50°$. Искомый угол CDE вписан в окружность и опирается на дугу величины y, отсюда $\angle CDE = 110°/2 = 55°$.

Ответ. $\angle CDE = 55°$.

Критерии оценки (всего 4 балла). 1 балл — знание формулы для величины угла с вершиной вне окружности; 2 балла — нахождение величин дуг (по одному баллу за составление системы и правильному ее решению); 1 балл — нахождение искомого угла через величину дуги.

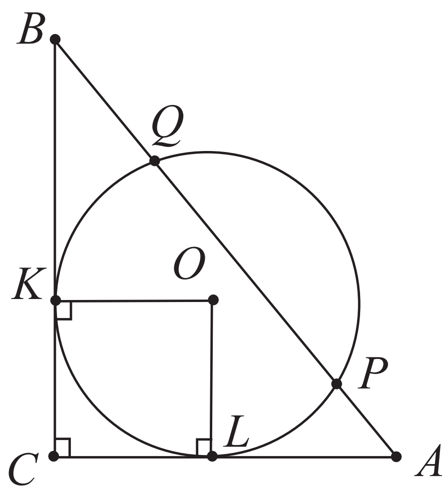

Рис. 2

2. *(5 баллов)* Окружность ω касается катетов прямоугольного треугольника ABC и пересекает гипотенузу AB в точках P и Q. Найдите радиус этой окружности, если $AP = 2$, $PQ = 6$ и $AC = 8$.

Решение. Будем использовать обозначения рисунка 2. Из теоремы о касательной и секущей получим $AL^2 = AP \cdot AQ = 2 \cdot 8 = 16$, что дает $AL = 4$ и $CL = 8 - 4 = 4$. Четырехугольник $CKOL$ содержит пару равных смежных сторон (например $CK = CL$ как отрезки касательных) и три прямых угла, поэтому $CKOL$ — квадрат и искомый радиус равен $CL = 4$.

Ответ. Радиус равен 4.

Критерии оценки (всего 5 баллов). 2 балла — знание теоремы о касательной секущей и 1 балл за правильное нахождение отрезка касательной; 1 балл — доказательство того, что $CKOL$ — квадрат (с точностью до обозначений); 1 балл — нахождение искомого радиуса.

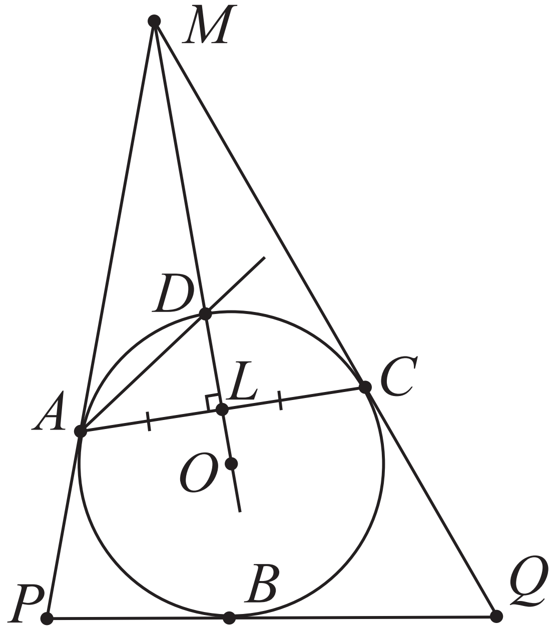

Рис. 3

3. *(6 баллов)* Окружность с центром O, вписанная в треугольник MPQ, касается его сторон MP, MQ и PQ в точках A, C и B соответственно. Биссектриса угла M пересекает эту окружность в точке D, лежащей внутри треугольника MAC. Докажите, что AD — биссектриса угла MAC.

Решение. Обозначим точки так, как это сделано на рисунке 3. Отрезки касательных AM и MC равны, поэтому $\triangle AMC$ — равнобедренный. Биссектриса ML в этом треугольнике одновременно является медианой и высотой. Значит отрезок DL является медианой и высотой в треугольнике ADC. Стало быть, $\triangle ADC$ также равнобедренный. Равенство хорд AD и DC дает равенство дуг AD и DC. Осталось заметить, что $\angle MAD$ и $\angle DAC$ вписаны в данную окружность и опираются на равные дуги. Поэтому $\angle MAD = \angle DAC$ и $[AD)$ — биссектриса угла MAC.

Критерии оценки (всего 6 баллов). 2 балла — доказательство равнобедренности $\triangle AMC$; 2 балла — доказательство равнобедренности $\triangle ADC$; 2 балла — использование равенства дуг для доказательства $\angle MAD = \angle DAC$.

Решения и критерии оценки

2 вариант

1. *(4 балла)* На окружности последовательно выбраны точки A, B, C и D. Хорды AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что $\angle AMD = 60°$ и градусные величины дуг AB, BC и CD относятся соответственно как $3 : 1 : 5$. Найдите величину угла ACD.

Решение. Будем использовать обозначения рис. 4. Учитывая, что вершина угла AMD лежит внутри окружности, имеем $(y+x)/2 = 60°$ или $y + x = 120°$. Кроме того, $9x + y = 360°$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} y + x = 120°, \\ 9x + y = 360° \end{cases}$$

находим $y = 90°$ и $x = 30°$. Искомый угол ACD вписан в окружность и опирается на дугу величины y, отсюда $\angle ACD = 90°/2 = 45°$.

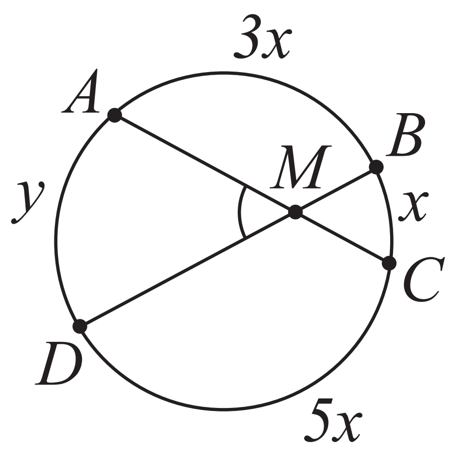

Рис. 4

Ответ. $\angle ACD = 45°$.

Критерии оценки (всего 4 балла). 1 балл — знание формулы для величины угла с вершиной внутри окружности; 2 балла — нахождение величин дуг (по одному баллу за составление системы и правильному ее решению); 1 балл — нахождение искомого угла через величину дуги.

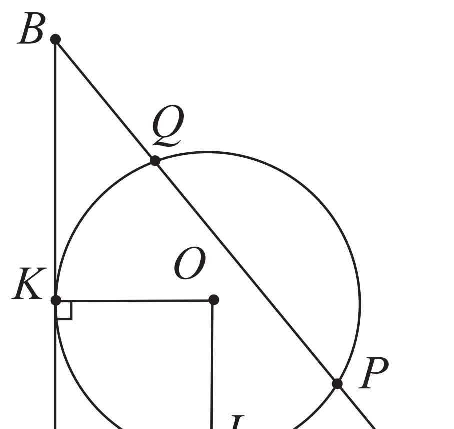

Рис. 5

2. *(5 баллов)* Окружность ω радиуса 6 касается катетов прямоугольного треугольника ABC и пересекает гипотенузу AB в точках P и Q (причем $P \in [AQ]$). Найдите длину AP, если $PQ = 9$ и $AC = 12$.

Решение. Будем использовать обозначения рис. 5. Четырехугольник $CKOL$ содержит пару равных смежных сторон (например $CK = CL$ как отрезки касательных) и три прямых угла, поэтому $CKOL$ — квадрат и $CL = OL = 6$. Отсюда $AL = AC - CL = 12 - 6 = 6$. Из теоремы о касательной и секущей получим $AL^2 = AP \cdot AQ$, что дает $36 = AP(AP + 9)$. Единственным положительным корнем этого уравнения является $AP = 3$.

Ответ. $AP = 3$.

Критерии оценки (всего 5 баллов). 1 балл — доказательство того, что $CKOL$ — квадрат (с точностью до обозначений); 2 балла — знание теоремы о касательной секущей и 1 балл за правильное составленное квадратное уравнение относительно AP; 1 балл — нахождение AP.

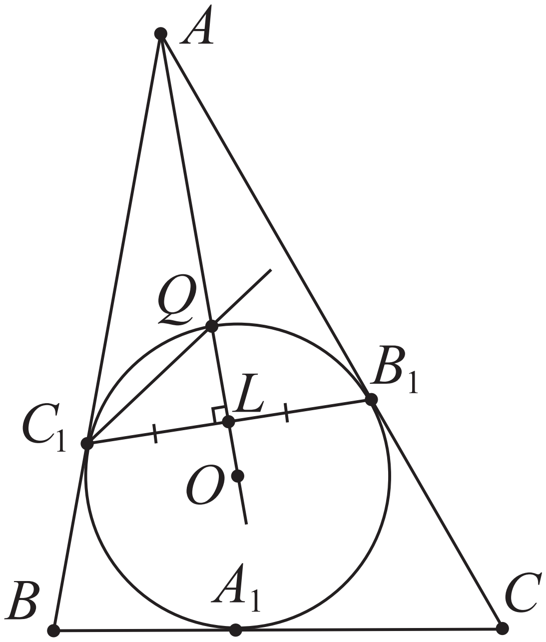

Рис. 6

3. *(6 баллов)* Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q, лежащей внутри треугольника AB_1C_1. Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1.

Решение. Обозначим точки так, как это сделано на рисунке 6. Отрезки касательных AC_1 и AB_1 равны, поэтому $\triangle AC_1B_1$ — равнобедренный. Биссектриса AL в этом треугольнике одновременно является медианой и высотой. Значит отрезок QL является медианой и высотой в треугольнике C_1QB_1. Стало быть, $\triangle C_1QB_1$ также равнобедренный. Равенство хорд C_1Q и QB_1 дает равенство дуг C_1Q и QB_1. Осталось заметить, что $\angle AC_1Q$ и $\angle B_1C_1Q$ вписаны в данную окружность и опираются на равные дуги. Поэтому $\angle AC_1Q = \angle B_1C_1Q$ и $[C_1Q)$ — биссектриса угла AC_1B_1.

Критерии оценки (всего 6 баллов). 2 балла — доказательство равнобедренности $\triangle AC_1B_1$; 2 балла — доказательство равнобедренности $\triangle C_1QB_1$; 2 балла — использование равенства дуг для доказательства $\angle AC_1Q = \angle B_1C_1Q$.