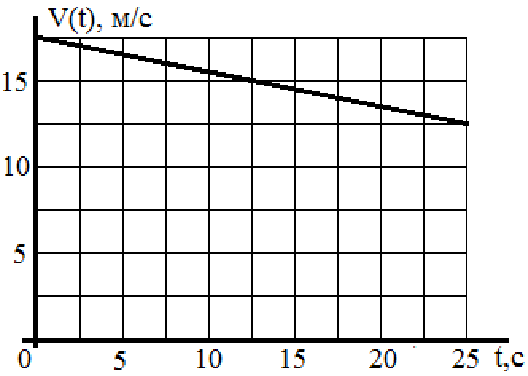
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
Специализированный учебно-научный центр
ЛЕТНЯЯ ШКОЛА 2017 года

ФИЗИКА
РАЗБОР ЗАДАНИЙ

1.Локомотив (3 балла)

Определите, пользуясь графиком, приведённым на рисунке, как движется поезд и какова сила тяги локомотива, если масса поезда 2500 тонн, а коэффициент трения 0,025.



РЕШЕНИЕ:

По графику зависимости скорости от времени определим проекцию ускорения поезда (за время 25 секунд скорость изменилась от 17,5 м/с до 12,5 м/с, ось OX направлена по движению поезда)

$$a_x = \frac{V - V_0}{\Delta t};$$

$$a_x = \frac{12{,}5 - 17{,}5}{25} = -0{,}2 \ \frac{м}{c^2}.$$

Запишем второй закон Ньютона для поезда в проекциях на ось OX

$$ma_x = F_{тяги} - F_{тр}.$$

Так как сила трения равна

$$F_{тр} = kmg,$$

то сила тяги локомотива

$$F_{тягм} = m(a_x + kg);$$

$$F_{тяги} = 1{,}25 \cdot 10^5 \ Н.$$

Критерии проверки:

Найдено ускорение, явно или неявно (знак минус) указано направление	1
Верно записан второй закон Ньютона для поезда	1
Получен правильный ответ, в том числе в числах	1

2.Космонавт на Марсе (3 балла)

Космонавт, находясь на поверхности Земли, притягивается к ней с силой 950 Н. С какой силой он будет притягиваться к Марсу, находясь на его поверхности? Радиус Марса в 2 раза, а масса в 10 раз меньше, чем у Земли.

РЕШЕНИЕ:

Сила, с которой космонавт притягивается к Земле, находясь на её поверхности, равна

$F = G\frac{mM}{R^2}$,

Где M – масса Земли, m – масса космонавта, R – радиус Земли,

$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{Н\cdot м^2}{кг^2}$ - постоянная всемирного тяготения.

Так как масса Марса равна $\frac{M}{10}$, а его радиус равен $\frac{R}{2}$, то сила притяжения космонавта к Марсу равна

$$F' = G\frac{mM}{10\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{4}{10}F;$$

$$F' = \frac{2}{5}\cdot 950 = 380\ (Н).$$

Критерии проверки:

Записана сила гравитационного взаимодействия на Земле	1
То же на Марсе	1
Получен правильный ответ, в том числе в числах	1

3.Верёвка с грузом (3 балла)

Верёвка выдерживает груз массой m_1 = 110 кг при подъёме его с некоторым ускорением, направленным по вертикали, и груз массой m_2 = 690 кг при опускании его с таким же по модулю ускорением. Какова максимальная масса груза m, который можно поднять на этой верёвке, двигая его с постоянной скоростью?

РЕШЕНИЕ:

Ускорение, с которым поднимают или опускают груз, обозначим а. При подъёме груза массой m_1 с ускорением а сила натяжения верёвки равна

$F = m_1(g + a)$.

При опускании груза массой m_2 с ускорением а сила натяжения верёвки такая же по величине (в обоих случаях речь идёт о максимальной массе груза, который можно поднять или опустить на этой верёвке, поэтому F – это максимально допустимая сила натяжения верёвки), поэтому

$F = m_2(g - a)$.

Преобразуем уравнения и определим значение максимальной силы натяжения верёвки

$$\begin{cases} \frac{F}{m_1} = g + a; \\ \frac{F}{m_2} = g - a; \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{m_1} + \frac{F}{m_2} = 2g \Rightarrow F = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$$

При равномерном подъёме груза массой m сила тяжести равна силе натяжения верёвки. Максимальная масса груза, который можно на этой верёвке поднять равномерно, определяется максимально допустимой силой натяжения

$$mg = F;$$

$$m = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2};$$

$$m = 189{,}75 \text{ кг}.$$

Критерии проверки:

Записаны вторые законы Ньютона для подъема и спуска	1
Явно или неявно есть понимание того, что сила натяжения веревки должна быть одинакова в обоих случаях	1
Получен правильный ответ, в том числе в числах	1

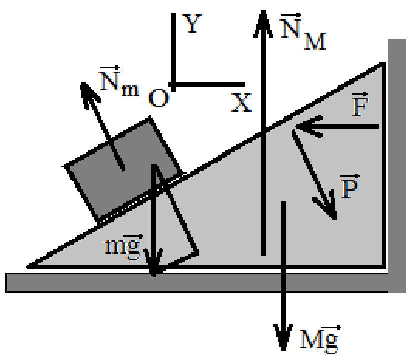
4.Клин у стены (3 балла)

Чему равна сила, действующая на вертикальную стенку со стороны клина, угол наклона которого к горизонту равен $\alpha=30^0$, на который помещён груз массой m = 1 кг. Трение отсутствует.

РЕШЕНИЕ:

Вес тела массой m, находящегося на наклонной плоскости, равен

$$P = mg\cos\alpha.$$



С такой силой тело действует на клин.

На клин действуют силы: тяжести Mg, нормальной реакции опоры N_M, вес тела P, сила реакции вертикальной стенки F. Так как клин покоится, то сумма сил, действующих на него равна нулю.

$$M\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_M + \vec{F} = \vec{0}.$$

Для нахождения силы F, с которой на клин действует стенка, спроецируем первый закон Ньютона на ось OX

$$F = P\sin\alpha = mg\cos\alpha\sin\alpha.$$

Критерии проверки:

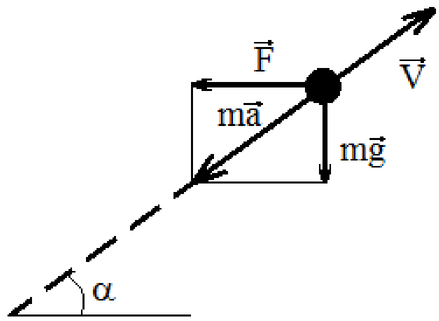
Сделав рисунок расставлены все силы	1
Найдены силы – N, P, тяжести	1
Получен правильный ответ – аккуратно все спроецировано	1

5.Частица в силовом поле (3 балла)

Частица, имеющая скорость V, направленную под углом α к линии горизонта, и массу m, попадает в область силового поля, где на неё действует постоянная горизонтально направленная сила F. Чему должна быть равна сила F, чтобы частица двигалась прямолинейно?

РЕШЕНИЕ:

Чтобы частица двигалась прямолинейно, то ускорение должно быть направлено вдоль той же прямой, что и вектор скорости частицы. Направление вектора ускорения совпадает с направлением равнодействующей сил $\vec{R}$, действующих на частицу,



$m\vec{a} = \vec{R};$

$\vec{R} = m\vec{g} + \vec{F}.$

Так как вектора $m\vec{g}$ и $\vec{F}$ перпендикулярны друг другу, то

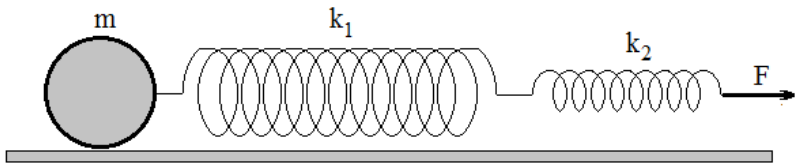
$F = mgctg\alpha.$

Критерии проверки:

Есть понимание, что ускорение (равнодействующая) должны быть направлены против скорости (по скорости)	1
Верно записан второй закон Ньютона	1
Получен правильный ответ	1

6.Тело на пружинках (3 балла)

Тело массы m прикреплено к двум соединённым последовательно пружинам жёсткости k_1 и k_2. К свободному концу пружин приложена постоянная сила F. Каково суммарное удлинение пружин, если колебания уже прекратились?



РЕШЕНИЕ:

Силы упругости пружин обозначим F_1 и F_2. Сила упругости первой пружины связана с её растяжением законом Гука

$F_1 = k_1 \cdot \Delta x_1.$

Для второй пружины аналогично

$F_2 = k_2 \cdot \Delta x_2.$

Выясним, как связаны силы упругости пружин. Для этого рассмотрим точку соединения пружин – на неё вправо действует сила упругости второй пружины, влево – сила упругости первой пружины, так как пружины невесомы, то

$F_1 = F_2.$

Выясним, как с силами упругости пружин связана сила F. Для этого рассмотрим крайнюю точку второй пружины, к которой приложена сила F. Поскольку пружина невесома, то

$F = F_2.$

Таким образом,

$F = k_2 \cdot \Delta x_2 = k_1 \cdot \Delta x_1.$

Выразим величины растяжения пружин

$\Delta x_1 = \dfrac{F}{k_1}$;

$\Delta x_2 = \dfrac{F}{k_2}$.

Суммарное удлинение пружин равно

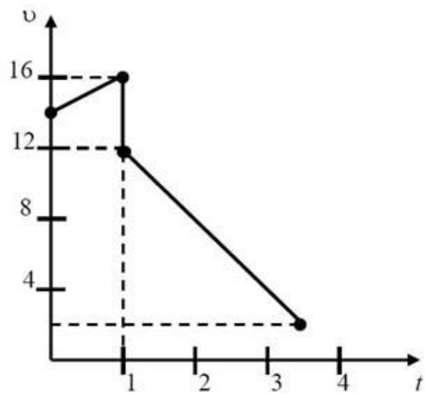
$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \dfrac{F}{k_1} + \dfrac{F}{k_2} = F\,\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Критерии проверки:

Записаны закону Гука дял обеих пружин	1
Указано, что силы упругости пружин одинаковы	1
Получен правильный ответ	1
Примечание: если пружины заменены на одну (последовательное соединение) и написано выражение для эффективной жесткости, то ставится не больше 2 баллов	

7.Наклонная плоскость (8 баллов)

Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости вниз, скользит по ней, ударяясь об упор, отскакивает от него и возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени представлен на рисунке. Найти угол наклона плоскости к горизонту.



РЕШЕНИЕ:

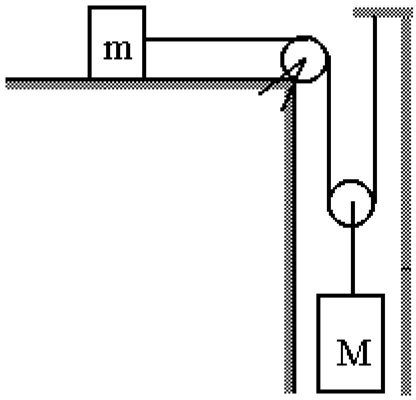
При движении вниз $ma_1 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$, где μ−коэффициент трения шайбы при движении по наклонной плоскости. Аналогично при движении вверх $m|a_2| = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$. Отсюда $a_1 + |a_2| = 2g\sin\alpha$.Значения a_1 и a_2 легко найти из рисунка: $a_1 = 2\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $|a_2| = 4\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{a_1 + |a_2|}{2g} \approx 0{,}33$; $\alpha = 17^0$.

Критерии проверки:

По графику найдено ускорение при движении вниз	1
По графику найдено ускорение при движении вверх	1
Сделан рисунок, расставлены силы	1
Записано правильно выражения для ускорения при движении вверх	1,5
Записано правильно выражения для ускорения при движении вниз	1,5
Найден либо сам угол, либо синус, либо косинус	1

8. Грузы и блоки (10 баллов)

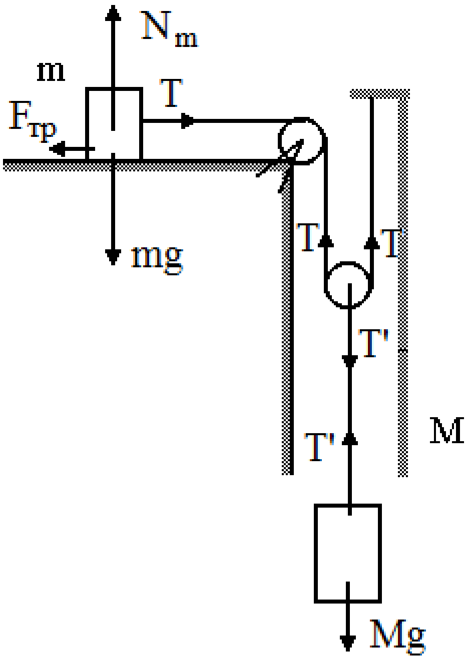
Определить ускорения грузов в системе, изображённой на рисунке. Коэффициент трения скольжения тела m по столу равен k. Массами блоков, нити пренебречь. Нити нерастяжимы.



РЕШЕНИЕ:

Предположим, что тела покоятся, и выясним, при каком соотношении масс возможен покой. Силы, действующие на тела, указаны на рисунке - силы тяжести $M\vec{g}$, $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_m$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, силы натяжения нити T и T'.

Запишем первый закон Ньютона для тел



$$F_{тр}^{пок} = T;$$

$$T' = Mg;$$

$$N_m = mg.$$

Для того, чтобы установить связь между силами натяжения, рассмотрим подвижный блок, так как его масса равна нулю, то

$$2T = T'.$$

Так как сила трения покоя меньше или равна силе трения скольжения

$$F_{тр}^{пок} \le kmg,$$

то получаем условие покоя системы

$$F_{тр}^{пок} = T = \frac{Mg}{2} \le kmg;$$

$$M < 2km.$$

Рассмотрим случай $M > 2km$. Тела движутся: тело M опускается, тело m поднимается по наклонной плоскости. Запишем второй закон Ньютона

$$ma_m = T - kmg;$$

$$Ma_M = Mg - T';$$

$$T' = 2T.$$

Установим связь между ускорениями тел. Если тело m переместилось вправо на Δx, то тело M опустится на $\frac{\Delta x}{2}$, поэтому

$$a_m = 2a_M.$$

С учётом найденных соотношений между ускорениями грузов и силами натяжения нитей, получим

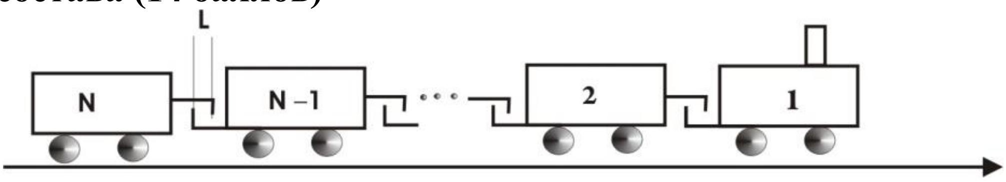
$$a_M = \frac{M}{M+4m}g - \frac{2km}{M+4m}g;$$

$$a_m = \frac{2M}{M+4m}g - \frac{4km}{M+4m}g.$$

Критерии проверки:

Сделан чертеж, указаны все силы	1
Установлены соотношения между силами натяжения нитей и ускорениями тел при движении	1
Написан в проекциях второй закон Ньютона для тела на столе	2
Написан в проекциях второй закон Ньютона для висящего тела	2
Найдено одно ускорение	2
Найдено второе ускорение	1
Записано условие покоя системы	1

9.Разгон тяжелого состава (14 баллов)



Для разгона состава тяжело груженых вагонов часто применяется следующая методика: вначале машинист дает задний ход и толкает вагоны назад, и лишь когда вагоны сместились назад, начинает разгон состава. Основа успешности такой методики кроется в устройстве сцепки вагонов, схематически изображенной на рисунке. В каждой сцепке имеется зазор величиной L, позволяющий при старте с места разгонять очередной вагон на длине L независимо от следующих за ним вагонов.

Состав имеет N вагонов одинаковой массы m. Требуется найти время, через которое состав полностью придет в движение. Локомотив развивает постоянную силу тяги F.

Для решение задачи найдите:

1.Время, через которое придет в движение третий вагон.

2.Исходя из второго закона Ньютона в форме $\Delta p = F\Delta t$, найдите связь времени, через которое последний вагон, начав движение, пройдет расстояние L, и скорости состава сразу после того, как последний вагон пришел в движение V_N.

3.Получите рекуррентное уравнение связи для квадрата импульса состава $p_{i+1}^2 = (i+1)2LFm + p_i^2$.

4.Записав несколько итераций (шагов) для $i = 0, 1, 2$, обобщите результаты и найти общее выражение для p_N^2 и V_N и t_N.

5.Убедитесь, что вычисления, выполненные в п. 1, дают тот же результат, что и найденный по общей формуле п. 4.

РЕШЕНИЕ:

1.Обозначим через t_1 – время за которое паровоз пройдет расстояние L.

$$L = \frac{at_1^2}{2};\ a = \frac{F}{m};\ t_1 = \sqrt{\frac{2Lm}{F}};\ V_1 = at_1 = \sqrt{\frac{2LF}{m}}.$$

Обозначим t_2 – время от начала движения, за которое второй вагон пройдет расстояние L. $t_2 = t_1 + t_2'$, где t_2' – время. за которое второй вагон пройдет расстояние L. Время t_2' найдем из условия

$$L = V_2' t_2' + \frac{a_2 t_2'^{\,'}}{2}; \;\; a_2 = \frac{F}{2m}; \; V_2' = V_1/2.$$

Решая уравнение, находим $t_2' = \sqrt{\frac{Lm}{F}}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $t_2 = \sqrt{\frac{Lm}{F}}\sqrt{6}$. Время. через которое придет в движение третий вагон равно $t_2 = \sqrt{\frac{Lm}{F}}\sqrt{6}$.

(1)

Этот пункт оценивается в 5 баллов.

2.Обозначим через t_N –время, через которое последний вагон, начав движение, пройдет расстояние L, а через V_N – скорость, которую приобрел состав к этому времени. Тогда

$$Ft_N = mNV_N \tag{2}$$

и для решения задачи нужно найти скорость состава к моменту начала движения последнего вагона, т. е. время t_{N-1}, когда предпоследний вагон пройдет расстояние L и начнет действовать на сцепку последнего вагона.

Этот пункт оценивается в 2 балла.

3.Для нахождения скорости V_N нельзя пользоваться законом сохранения энергии, поскольку каждый удар, при котором вовлекается в движение очередной вагон, является неупругим. Ускорение a_{i+1} $i+1$ вагона с одной стороны, определяется из уравнения динамики Ньютона

$$a_{i+1} = \frac{F}{(i+1)m}, \tag{3}$$

а с другой, может быть найдено из кинематического соотношения

$$a_{i+1} = \frac{V_{i+1}^2 - (V_{i+1}')^2}{2L}, \tag{4}$$

где V_{i+1}' это скорость движения состава в тот момент, когда вагон i привел в движение вагон $i+1$, т. е. произошел неупругий удар. Скорость V_{i+1}' может быть найдена из закона сохранения импульса

$$(i+1)mV_{i+1}' = imV_i. \tag{5}$$

Подставляя (3) и (5) в (4), получаем

$$V_{i+1}^2 = \frac{2LF}{(i+1)m} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 V_i^2; \text{ или } \;\; p_{i+1}^2 = (i+1)2LFm + p_i^2 \tag{6}$$

Этот пункт оценивается в 3 балла.

4.Полученное рекуррентное соотношение для импульса состава позволяет найти p_N^2. Производя итерации, получаем: $i=0,\; p_1^2 = 2FLm;\; i=1,\; p_2^2 = 6FLm;\; i=2,\; p_3^2 = 12FLm.$ Итерации можно и продолжить, но уже есть возможность обобщить результаты и записать общую формулу

$$p_N^2 = FLmN(N+1). \tag{7}$$

Выражение (7) позволяет получить выражение для скорости состава V_N

$$V_N = \sqrt{\frac{FL}{m}}\sqrt{\frac{(N+1)}{N}}. \qquad (8)$$

Подставляя это выражение в формулу (2) получаем искомый результат

$$t_{N-1} = \sqrt{\frac{Lm}{F}}\sqrt{N(N-1)}. \qquad (9)$$

Этот пункт оценивается в 3 балла.

5.Для $N = 3$ по формуле (9) получаем результат (1).

Этот пункт оценивается в 1 балл.