

Алгебра, ЛШ — 2017

1 вариант

1. (6 баллов) Имеется 8 билетов на балкон и 7 билетов в партер на спектакль. Сколькими способами их можно распределить между 15 людьми (учитывая пожелания), если семеро хотят сидеть только на балконе, четверо — только в партере, а остальным всё равно, где сидеть? (В каждом билете указаны следующие данные: номер ряда, номер места, партер или балкон.)

2. (4 балла) Шестнадцать девочек собрали 105 грибов. Докажите, что какие-то две из них собрали одинаковое количество грибов.

3. (4 балла) Решите методом интервалов неравенство $\frac{(x+2)(x-1)^2}{12-x^2-x} \leq 0$.

4. а) (8 баллов) Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(y-x+1)(y+x-3)\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2-2} \geq 0.$$

б) (3 балла) Найдите все значения параметра b , при которых неравенство

$$(b-x+1)(b+x-3)\sqrt{(x-2)^2+(b-1)^2-2} \geq 0$$

имеет конечное множество решений.

Алгебра, ЛШ — 2017

2 вариант

1. (6 баллов) Имеется 9 билетов на балкон и 6 билетов в партер на спектакль. Сколькими способами их можно распределить между 15 людьми (учитывая пожелания), если четверо хотят сидеть только на балконе, пятеро — только в партере, а остальным всё равно, где сидеть? (В каждом билете указаны следующие данные: номер ряда, номер места, партер или балкон.)

2. (4 балла) В классе 20 учеников. Докажите, что при любой раздаче 180 конфет всегда найдутся хотя бы два ученика, получивших одинаковое количество конфет.

3. (4 балла) Решите методом интервалов неравенство $\frac{(x-3)(x+1)^2}{8-x^2+2x} \geq 0$.

4. а) (8 баллов) Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(y-x+4)(y+x-2)\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2-2} \geq 0.$$

б) (3 балла) Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$(a-x+4)(a+x-2)\sqrt{(x-3)^2+(a+1)^2-2} \geq 0$$

имеет бесконечное множество решений.

Решения и критерии оценки

1 вариант

1. (6 баллов) Имеется 8 билетов на балкон и 7 билетов в партер на спектакль. Сколькими способами их можно распределить между 15 людьми (учитывая пожелания), если семеро хотят сидеть только на балконе, четверо — только в партере, а остальным всё равно, где сидеть? (В каждом билете указаны следующие данные: номер ряда, номер места, партер или балкон.)

Решение. Сначала обеспечим билетами привередливых зрителей. Так как билеты отличаются друг от друга еще и номерами мест, то для желающих сидеть в партере существует A_7^4 способов выбрать билеты, для желающих сидеть на балконе — A_8^7 способов. Остается 4 билета, которые распределяются между 4 зрителями $4!$ способами. По правилу произведения получаем ответ $A_7^4 \cdot A_8^7 \cdot 4! = \frac{7!8!}{3!1!} \cdot 4! = 812851200$ способов.

Критерии оценки (всего 6 баллов). 2 балла — понимание того, что нужно использовать формулы размещения без повторений; по 1 баллу — нахождение числа способов выбрать билеты для желающих сидеть на балконе и в партере; 1 балл — нахождение числа способов распределить оставшиеся билеты; 1 балл — использование правила произведения.

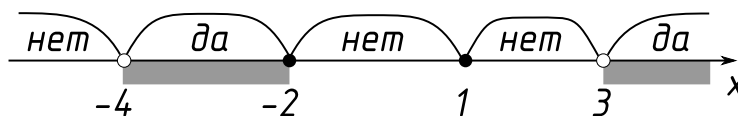
2. (4 балла) Шестнадцать девочек собрали 105 грибов. Докажите, что какие-то две из них собрали одинаковое количество грибов.

Решение. Если бы все девочки собрали разное количество грибов, то всего было бы собрано не меньше, чем $0 + 1 + 2 + \dots + 15 = 120$ грибов, что противоречит условию.

Критерии оценки (всего 4 балла). 2 балла — верное распределение грибов, когда все получили разное количество; 1 балл — верно найдено общее число грибов при предположенном распределении; 1 балл — получено обоснованное противоречие с условием задачи.

3. (4 балла) Решите методом интервалов неравенство $\frac{(x+2)(x-1)^2}{12-x^2-x} \leq 0$.

Решение. Найдем корни числителя и знаменателя и нанесем их на числовую прямую.



Поскольку неравенство нестрогое, корни числителя изобразим «закрашенными» точками; корни знаменателя в любом случае изобразим «выколотыми» точками. Все корни, кроме 1, — первой кратности; знак левой части неравенства при переходе аргумента через соответствующие точки меняется на противоположный. Корень 1 — второй кратности, при переходе через него знак левой части не меняется. Определив знак левой части на одном из промежутков, расставим на промежутках слова

«да» (неравенство верно) и «нет» (неравенство неверно). Отметим, что в точке 1 неравенство верно.

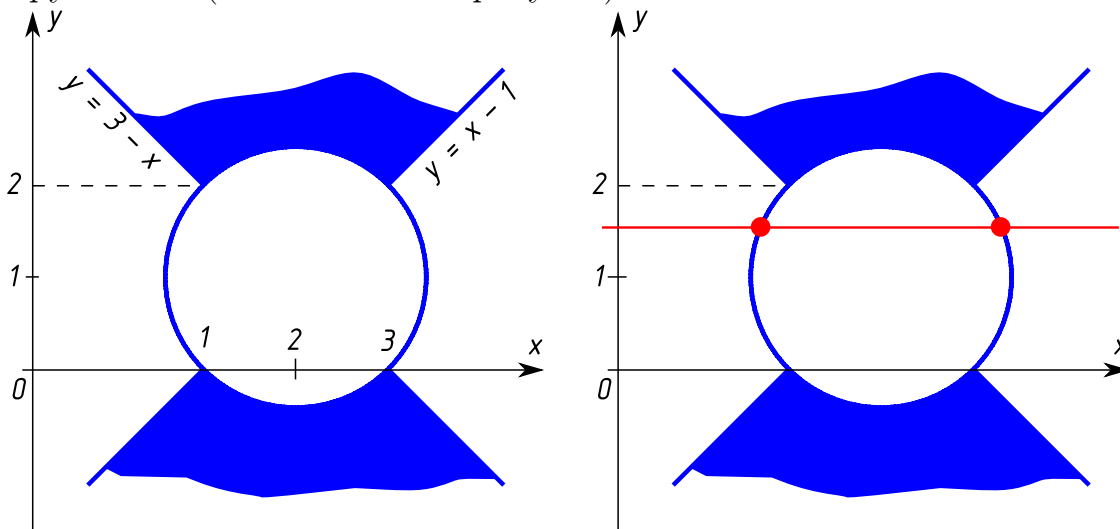
Ответ. $(-4; -2] \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$.

Критерии оценки (всего 4 балла). Правильно найдены корни числителя и знаменателя — 1 балл. Правильно определены знаки на промежутках — 1 балл. Не потерян изолированный корень — 1 балл. Правильно расставлены и учтены в ответе выколотые точки — 1 балл.

4. а) (8 баллов) Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(y - x + 1)(y + x - 3)\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} - 2 \geq 0.$$

Решение. Сначала изобразим на плоскости (см. левый рисунок) линии $y = x - 1$, $y = 3 - x$ и $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Последняя линия — окружность с центром $(2; 1)$; ОДЗ неравенства — эта окружность и часть плоскости, лежащая вне круга. Нетрудно также найти и координаты точек пересечения двух построенных прямых и окружности (обозначены на рисунке).



Методом областей найдем области, координаты точек которых удовлетворяют неравенству (залиты на рисунке синим цветом). Заметим, что нас интересуют только точки, лежащие в ОДЗ и, кроме того, координаты точек самой окружности также удовлетворяют неравенству, поскольку оно нестрогое.

Ответ. Окружность (на рисунке изображена синим цветом) и залитые синим цветом области.

Критерии оценки (всего 8 баллов). Правильно изображены прямые и окружность — 2 балла. Найдены координаты точек их пересечения — 2 балла. Найдены области без учета ОДЗ — 1 балл. Учтено ОДЗ — 1 балл. В ответе не потеряна сама окружность — 2 балла.

б) (3 балла) Найдите все значения параметра b , при которых неравенство

$$(b - x + 1)(b + x - 3)\sqrt{(x - 2)^2 + (b - 1)^2} - 2 \geq 0$$

имеет конечное множество решений.

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Будем рассматривать всевозможные прямые $y = b$; решениями неравенства будут абсциссы точек пересечения этих прямых с полученным в предыдущей задаче множеством. Красным цветом на правом рисунке изображена одна из таких прямых; жирные красные точки — те самые точки пересечения (в изображенном случае их две, то есть как раз множество точек пересечения конечно). Рассматривая различные положения прямой $y = b$ и получающиеся в пересечении множества точек, получаем

Ответ. $b \in [0; 2]$.

Критерии оценки (всего 3 балла). Правильно найден промежуток (возможно, в ответ не включены концы отрезка) — 2 балла. Концы отрезка включены в ответ — 1 балл.

Решения и критерии оценки

2 вариант

1. (6 баллов) Имеется 9 билетов на балкон и 6 билетов в партер на спектакль. Сколькими способами их можно распределить между 15 людьми (учитывая пожелания), если четверо хотят сидеть только на балконе, пятеро — только в партере, а остальным всё равно, где сидеть? (В каждом билете указаны следующие данные: номер ряда, номер места, партер или балкон.)

Решение. Сначала обеспечим билетами привередливых зрителей. Так как билеты отличаются друг от друга еще и номерами мест, то для желающих сидеть в партере существует A_6^5 способов выбрать билеты, для желающих сидеть на балконе — A_9^4 способов. Остается 6 билетов, которые распределяются между 6 зрителями $6!$ способами. По правилу произведения получаем ответ $A_6^5 \cdot A_9^4 \cdot 6! = 1567641600$ способов.

Критерии оценки (всего 6 баллов). 2 балла — понимание того, что нужно использовать формулы размещения без повторений; по 1 баллу — нахождение числа способов выбрать билеты для желающих сидеть на балконе и в партере; 1 балл — нахождение числа способов распределить оставшиеся билеты; 1 балл — использование правила произведения.

2. (4 балла) В классе 20 учеников. Докажите, что при любой раздаче 180 конфет всегда найдутся хотя бы два ученика, получивших одинаковое количество конфет.

Решение. Если все ученики получили различное количество конфет, то конфет было бы не меньше $0 + 1 + 2 + \dots + 19 = 190$, что противоречит условию.

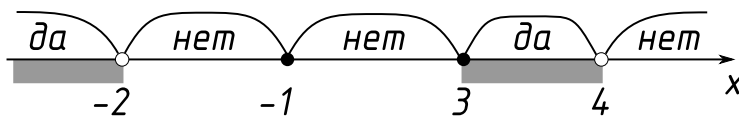
Критерии оценки (всего 4 балла). 2 балла — верное распределение конфет, когда все получили разное количество;

1 балл — верно найдено общее число конфет при предположенном распределении;

1 балл — получено обоснованное противоречие с условием задачи.

3. (4 балла) Решите методом интервалов неравенство $\frac{(x-3)(x+1)^2}{8-x^2+2x} \geq 0$.

Решение. Найдем корни числителя и знаменателя и нанесем их на числовую прямую.



Поскольку неравенство нестрогое, корни числителя изобразим «закрашенными» точками; корни знаменателя в любом случае изобразим «выколотыми» точками. Все корни, кроме -1 , — первой кратности; знак левой части неравенства при переходе аргумента через соответствующие точки меняется на противоположный. Корень -1 — второй кратности, при переходе через него знак левой части не меняется. Определив знак левой части на одном из промежутков, расставим на промежутках слова «да» (неравенство верно) и «нет» (неравенство неверно). Отметим, что в точке -1 неравенство верно.

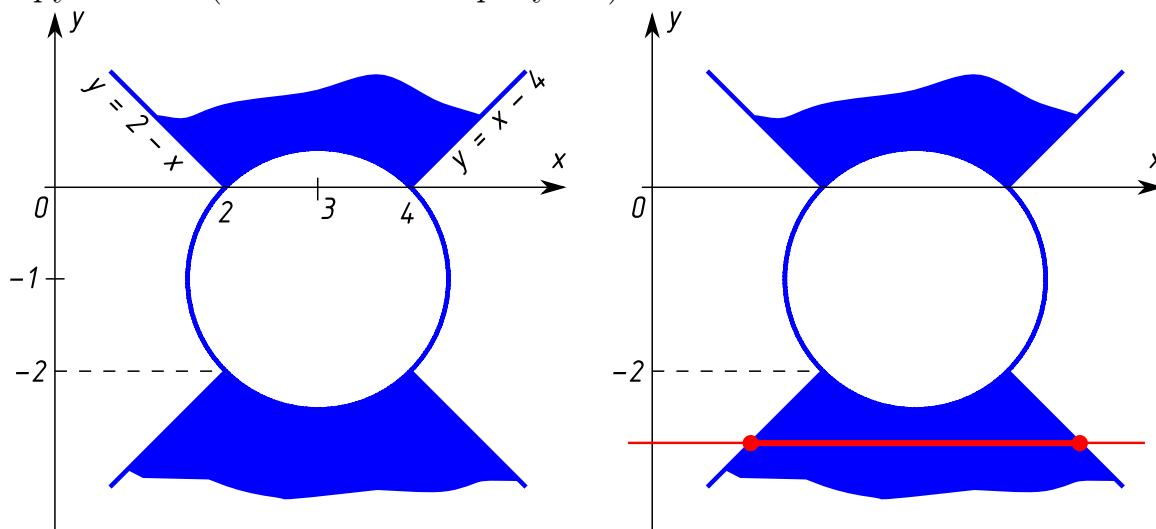
Ответ. $(-\infty; -2) \cup \{-1\} \cup [3; 4)$.

Критерии оценки (всего 4 балла). Правильно найдены корни числителя и знаменателя — 1 балл. Правильно определены знаки на промежутках — 1 балл. Не потерян изолированный корень — 1 балл. Правильно расставлены и учтены в ответе выколотые точки — 1 балл.

4. а) (8 баллов) Изобразите на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(y - x + 4)(y + x - 2)\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 2} \geq 0.$$

Решение. Сначала изобразим на плоскости (см. левый рисунок) линии $y = x - 4$, $y = 2 - x$ и $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$. Последняя линия — окружность с центром $(3; -1)$; ОДЗ неравенства — эта окружность и часть плоскости, лежащая вне круга. Нетрудно также найти и координаты точек пересечения двух построенных прямых и окружности (обозначены на рисунке).



Методом областей найдем области, координаты точек которых удовлетворяют неравенству (залиты на рисунке синим цветом). Заметим, что нас интересуют только точки, лежащие в ОДЗ и, кроме того, координаты точек самой окружности также удовлетворяют неравенству, поскольку оно нестрогое.

Ответ. Окружность (на рисунке изображена синим цветом) и залитые синим цветом области.

Критерии оценки (всего 8 баллов). Правильно изображены прямые и окружность — 2 балла. Найдены координаты точек их пересечения — 2 балла. Найдены области без учета ОДЗ — 1 балл. Учтено ОДЗ — 1 балл. В ответе не потеряна сама окружность — 2 балла.

б) (3 балла) Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$(a - x + 4)(a + x - 2)\sqrt{(x - 3)^2 + (a + 1)^2} - 2 \geq 0$$

имеет бесконечное множество решений.

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Будем рассматривать всевозможные прямые $y = a$; решениями неравенства будут абсциссы точек пересечения этих прямых с полученным в предыдущей задаче множеством. Красным цветом на правом рисунке изображена одна из таких прямых; жирный красный отрезок — то самое множество точек пересечения (в изображенном случае оно как раз бесконечно). Рассматривая различные положения прямой $y = a$ и получающиеся в пересечении множества точек, получаем

Ответ. $a \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Критерии оценки (всего 3 балла). Правильно найдены два промежутка (возможно, в ответ включены точки -2 и 0) — 2 балла. Точки -2 и 0 не включены в ответ — 1 балл.