Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

B	C	Сумма	Балл (из 10)	Подпись

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 физико- математический, естественно-научный и математико-информационный классы
СУНЦ УрФУ
15 мая 2016 года
Вариант 1

Часть B

К каждому заданию приведите только ответ.

B1. Решите уравнение: $\dfrac{|x-3|-4}{\sqrt{4-x}+2}=0$.
Ответ:________________

B2. Упростите выражение и вычислить при $x=\frac{1}{2}$:
$\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\sqrt{x^2-2x+1}$.
Ответ:________________

B3. В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятерки, третья – четверки, половина – тройки. Остальные работы оценины как неудовлетворительные. Сколько было неудовлетворительных работ? Ответ:________________

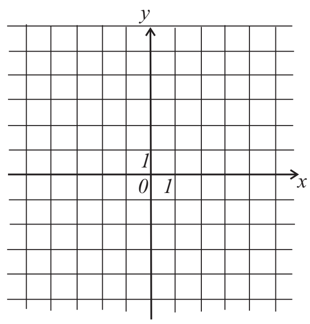
B4. Около окружности описана равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 5, а синус острого угла при основании равен $\frac{3}{5}$. Найдите площадь трапеции. Ответ:________________

B5. При каких значениях a графики функции $y=3x+2$ и $y=2x+a$ пересекаются на оси абсцисс. Ответ:________________

B6. Решите неравенство: $(x^2-x-2)^2+(x^2-1)^2\leqslant 0$.
Ответ:________________

B7. Вычислите: $\dfrac{7^{n+1}\cdot 2^{3n-4}}{56^{n-1}}$.
Ответ:________________

B8. Постройте график функции $y=x-\dfrac{x-2}{2-x}$.
Ответ:________________



B9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $111°$, угол ADB равен $22°$. Найдите градусную меру угла BAC. Ответ:________________

B10. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt{-x^2-10x+11}}{x^2+x-12}\geqslant 0$.
Ответ:________________

Часть C

К заданиям приведите полное решение.

C1. Решить уравнение: $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$.

C2. Докажите, что число 234234234... 234 (группа цифр 234 повторяется 55 раз) делится на 18, но не делится на 36.

C3. При каких значениях p прямая $y=0,3x+p$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 60 кв.ед?

C4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF и BH.
а) докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику HFC;
б) найдите площадь треугольника HFC, если угол ACB равен $30°$, а площадь треугольника ABC равна $8\sqrt{3}$.

Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

B	C	Сумма	Балл (из 10)	Подпись

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 физико- математический, естественно-научный и
математико-информационный классы
СУНЦ УрФУ
15 мая 2016 года
Вариант 2

Часть B

К каждому заданию приведите только ответ.

B1. Решите уравнение: $\dfrac{5-|x+2|}{\sqrt{2-x}+1}=0.$
Ответ:________________

B2. Упростите выражение и вычислите его при $x=\frac{1}{2}$:
$\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\sqrt{(x^2-2x+1)}.$
Ответ:________________

B3. В городской Думе города N меньше 50 депутатов. Девятая часть депутатов считает, что секвестр — мера полезная для экономики, третья – вредная, пятая – не знает значение этого слова, остальные – воздержались. Сколько было воздержавшихся? Ответ:________________

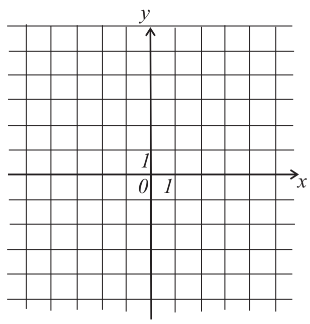
B4. Около окружности описана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь трапеции. Ответ:________________

B5. При каких значениях m графики функции $y=3x-5$ и $y=2x+m$ пересекаются на оси ординат. Ответ:________________

B6. Решите неравенство: $(x^2+x-2)^2+(x^2-4)^2\leqslant 0.$
Ответ:________________

B7. Вычислите: $\dfrac{3^{2n-3}\cdot 7^{n-1}}{63^{n-1}}.$
Ответ:________________

B8. Постройте график функции $y=\dfrac{x-1}{1-x}+x.$
Ответ:________________



B9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 135°, угол CAD равен 70°. Найдите градусную меру угла ABD. Ответ:________________

B10. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt{18-7x-x^2}}{x^2+2x-15}\leqslant 0.$
Ответ:________________

Часть C

К заданиям приведите полное решение.

C1. Решить уравнение: $\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}.$

C2. Докажите, что число 345 345... (группа цифр 345 повторяется 41 раз) делится на 15, но не делится на 45.

C3. При каких значениях q прямая $y=0,2x+q$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 40 кв.ед?

C4. В остроугольном треугольнике KLM проведены высоты LE и KH.
а) докажите, что треугольник KLM подобен треугольнику EHM;
б) найдите площадь треугольника EHM, если угол LMK равен 45°, а площадь треугольника KLM равна $10\sqrt{2}$.

Ответы и решения к части B

B1. Найдем область допустимых значений:
$4-x\geqslant 0$; $x\leqslant 4$. Знаменатель $\sqrt{4-x}+2$ при всех x из ОДЗ положителен. Приравняем к нулю числитель, получим

$|x-3|-4=0\Leftrightarrow |x-3|=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=4, \\ x-3=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 - \text{посторонний корень}, \\ x=-1 - \text{подходит по ОДЗ}. \end{array}\right.$

Ответ: $x=-1$.

B2. Найдем ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} x\geqslant 0, \\ \sqrt{x}-1\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geqslant 0, \\ x\neq 1. \end{array}\right.$ Приведем к общему знаменателю дроби.

$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\cdot\sqrt{(x-1)^2}=\frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\cdot\sqrt{(x-1)^2}=\frac{2x+2}{x-1}\cdot|x-1|.$$

Подставим $x=\frac{1}{2}$.

Получим

$$\frac{1+2}{-\frac{1}{2}}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=-3.$$

Ответ: -3.

B3. Пусть x — количество учеников в классе. Так как нужно будет посчитать $\frac{1}{7}$ от x, $\frac{1}{3}$ от x и $\frac{1}{2}$ от x, то x должно делиться на 7, на 3 и на 2. Такое подходящее число, меньшее пятидесяти — только 42. Тогда
$\frac{1}{7}\cdot 42=6$ – получили «5»,
$\frac{1}{3}\cdot 42=14$ – получили «4»,
$\frac{1}{2}\cdot 42=21$ – получили «3»,
$42-(6+14+21)=1$ – получили «2».
Ответ: 1.

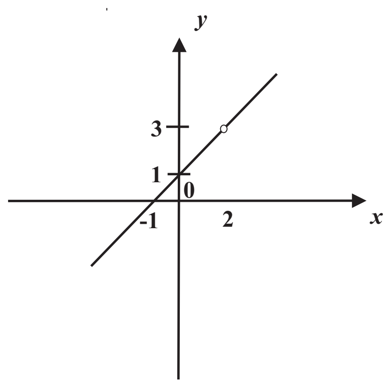
B4. Из треугольника ABH имеем $h=AB\cdot\sin\angle A=5\cdot\frac{3}{5}=3$. По свойству четырехугольника, описанного около окружности, получаем $a+b=AB+CD=5+5=10$, тогда $S=\frac{10}{2}\cdot 3=15$.
Ответ: 15.

B5. Графики пересекаются на оси абсцисс, следовательно $y=0$. Тогда $y=3x+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\Rightarrow$ точка пересечения имеет координаты $(-\frac{2}{3};0)$. Подставим их во второе уравнение. Получим $0=2\cdot(-\frac{2}{3})+a\Rightarrow a=\frac{4}{3}$.
Ответ: $\frac{4}{3}$.

B6. Так как $(x^2-x-2)^2\geqslant 0$ и $(x^2-1)\geqslant 0$, то левая часть или только положительна, или равна нулю. Последнее возможно лишь при $\left\{\begin{array}{l} x^2-x-2=0, \\ x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2; x=-1, \\ x=1; x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1.$
Ответ: $x=-1$.

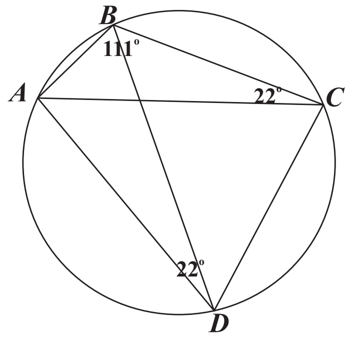
B7. $\frac{7^{n+1}\cdot 2^{3n-4}}{56^{n-1}}=\frac{7^{n+1}\cdot 2^{3n-4}}{(7\cdot 8)^{n-1}}=\frac{7^{n+1}\cdot 2^{3n-4}}{7^{n-1}\cdot 8^{n-1}}=\frac{7^{n+1-(n-1)}\cdot 2^{3n-4}}{2^{3n-3}}=\frac{7^2}{2^1}=$
$\frac{49}{2}=24,5.$

B8. $y=x-\frac{x-2}{2-x}=x+1$, $x\neq 2$.



B9. $\angle ACB = 22° = \angle ADB$, так как оба угла опираются на одну дугу AB, тогда $\angle BAC = 180° - 11° - 22° = 47°$.

Ответ: $47°$.



B10. Найдем ОДЗ

$$\begin{cases} -x^2 - 10x + 11 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 10x - 11 \leqslant 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \neq -4, x \neq 3. \end{cases}$$

Числитель принимает только неотрицательные значения, значит знаменатель должен быть положительным, т.е. $x^2 + x - 12 > 0$. С учетом ОДЗ получаем $[-11; -4) \bigcup \{1\}$.

Ответ: $[-11; -4) \bigcup \{1\}$.

Решение и ответы к части C

C1. $\frac{2x+7}{(x+6)(x-1)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} = \frac{1}{x+3}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -6, \\ x \neq 1, \\ x \neq -3 \end{cases}$ Приведем все дроби к общему знаменателю, получим:

$(2x + 7)(x + 3) + 3(x - 1) = (x + 6)(x - 1) \Leftrightarrow$

$2x^2 + 7x + 6x + 21 + 3x - 3 = x^2 + 6x - x - 6 \Leftrightarrow$

$x^2 + 11x + 24 = 0$. Из двух решений этого уравнения $x = -3$ – посторонний корень. Остается только $x = -8$.

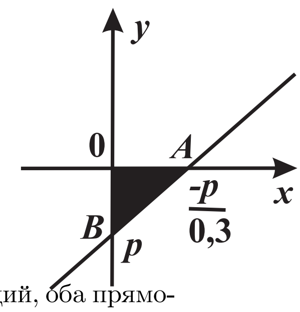
Ответ: $x = -8$.

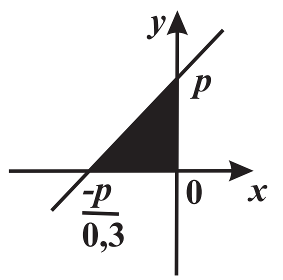
C2. Число делится на 18, если оно делится на 2 и на 9. Число 234 234 ...234 – четное число, значит делится на 2. А сумма цифр числа – $(2 + 3 + 4) \cdot 55 = 9 \cdot 55$ – делится на 9. Чтобы число делилось на 36, необходимо, чтобы это число делилось на 9 и на 4. На 9 мы уже проверку сделали. По признаку делимости на 4 необходимо, чтобы последние две цифры числа образовали число, которое делится на 4. Данное число оканчивается на 34, которое не делится на 4.

C3. Так как линейная функция возрастает, то возможны два случая расположения прямой (при $p \geqslant 0$ и $p < 0$). Используя обозначения рисунка, имеем $S = \frac{OA \cdot OB}{2}$, поэтому

$S = \left| \frac{p(-p)}{2(0.3)} \right| = 60 \Leftrightarrow p^2 = 0,6 \cdot 60 \Leftrightarrow p^2 = 36$, откуда $p = 6$ или $p = -6$.

Ответ: $p = \pm 6$.



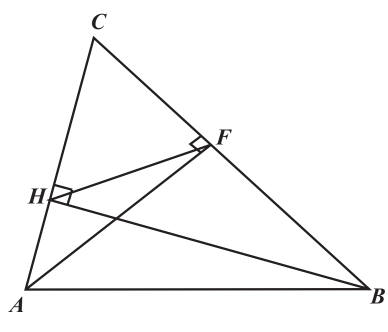


C4. 1) $\triangle AFC \sim \triangle CHB$, по первому признаку ($\angle C$ – общий, оба прямоугольные треугольники). Запишем отношение пропорциональных сторон: $AC/CB = CF/CH$. По свойству пропорции равенство можно записать так: $CH/CB = CF/AC$, но $CF/AC = \cos\angle C$.

Рассмотрим треугольник HCF и треугольник ABC. Они подобны по двум пропорциональным сторонам и общему углу C, причем коэффициент подобия равен $k = \cos\angle C = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда

$\frac{S\triangle HFC}{S\triangle ABC} = k^2 = \frac{3}{4}$, тогда $S_{\triangle HFC} = \frac{3}{4} \cdot 8\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.



Ответы к части B

B1. -7. **B2.** $-1,5$. **B3.** 16. **B4.** 20. **B5.** -5. **B6.** -2. **B7.** $\frac{1}{3}$. **B8.** $y = -1 + x$, $x \neq 1$. **B9.** 65. **B10.** $(-5; 2] \bigcup \{-9\}$.

Ответы к части C

C1. 0. **C3.** $q = \pm 4$. **C4.** $S = 5\sqrt{2}$.