СУНЦ УрФУ
Вступительный тест по математике для поступающих в 10 физико-математический, физико-технический, математико-экономический и математико-информационный классы
2 мая 2016

Вариант 1

Часть B

B1. Какую цифру нужно дописать в начало числа 86375, чтобы получившееся число делилось на 45?

Решение. Обозначим неизвестную цифру за x. Для того, чтобы число $\overline{x86375}$ делилось на 45, достаточно деления его на 5 и 9. Поскольку последняя цифра числа - это 5, число делится на 5. Для того, чтобы число $\overline{x86375}$ делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр $x+8+6+3+7+5 = x+29$ делилась на 9. Единственным подходящим вариантом цифры является $x = 7$.

Ответ: 7.

B2. Решите уравнение: $\frac{(3+2y)(2y-3)}{1-y} = 3-2y$.

Решение. Перенесем правую часть уравнения налево и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(2y-3)\left((3+2y)+(1-y)\right)}{1-y} = 0,$$

$$\frac{(2y-3)(y+4)}{1-y} = 0.$$

Отсюда получаем, что $y = \frac{3}{2}$ или $y = -4$. Заметим, что ограничение $y \neq 1$ не сказывается на ответе.

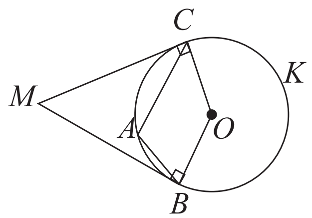
Ответ: $y = \frac{3}{2}$ и $y = -4$.

B3. В окружности проведены хорды AB и AC, образующие угол $130°$. Через точки B и C проведены касательные к окружности, пересекающиеся в точке M. Найдите угол $\angle BMC$.

Решение. Поскольку $\angle BAC = 130°$ является вписанным углом, $\smile BKC = 2\angle BAC = 260°$ и $\smile BAC = 360° - \smile BKC = 100°$. Угол $\angle BOC$ — центральный, значит,

$$\angle BOC = \smile BAC = 100°,$$

$\angle MBO = \angle MCO = 90°$ по свойству радиуса, проведенного в точку касания. Тогда из четырехугольника $BMCO$ находим $\angle BMC = 360° - 2 \cdot 90° - 100° = 80°$.



Ответ: $80°$.

B4. Решите неравенство: $(t-2)\sqrt{-t^2+7t-6} \geq 0$.

Решение. Найдем ОДЗ: $-t^2+7t-6 \geq 0$, откуда $1 \leq t \leq 6$. Заметим, что значения $t=1$ и $t=6$ являются решением исходного неравенства. Теперь будем рассматривать только значения $t \in (1;6)$. При этих значениях t верно неравенство $-t^2+7t-6>0$, т.е. $\sqrt{-t^2+7t-6}>0$, тогда достаточно решить неравенство $t-2 \geq 0$, откуда $t \geq 2$. Пересекая найденный луч и ОДЗ и учитывая, что при $t=1$ и $t=6$ неравенство верно, получаем окончательный ответ $t \in [2;6]$ и $t=1$.

Ответ: $t \in [2;6]$ и $t=1$.

B5. Девятикласснику Серёже нужно 50 секунд, чтобы спуститься пешком по неподвижному эскалатору. Движущийся эскалатор поднимает его, стоящего на ступеньке, за 60 секунд. Сколько секунд нужно Серёже, чтобы спуститься пешком по поднимающемуся эскалатору?

Решение. Обозначим расстояние за 1, тогда скорость спуска Серёжи равна $\frac{1}{50}$, а скорость подъема эскалатора $\frac{1}{60}$. На поднимающемся эскалаторе Серёжа будет спускаться со скоростью $\frac{1}{50}-\frac{1}{60}=\frac{1}{300}$, следовательно, на спуск при работающем эскалаторе Серёжа затратит 300 секунд.

Ответ: 300.

B6. Упростите выражение: $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$, если $0<x<2$.

Решение.

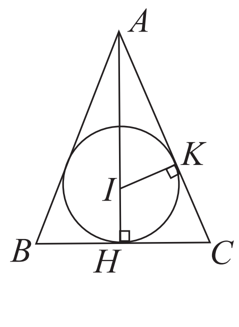
$$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\frac{x-2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\frac{x-2}{\sqrt{x}}}=\frac{|x-2|\sqrt{x}}{x-2}=\frac{(2-x)\sqrt{x}}{x-2}=-\sqrt{x},$$

так как по условию $0<x<2$ подмодульное выражение отрицательно и модуль раскроется со знаком "минус".

Ответ: $-\sqrt{x}$.

B7. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 15, а радиус вписанной окружности равен 6. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC, I — центр вписанной в него окружности. В равнобедренном треугольнике центр I вписанной окружности лежит на высоте AH, проведенной к основанию. Тогда $AI=AH-IH=15-6=9$. Радиус IK, проведенный в точку касания с боковой стороной AC, перпендикулярен AC. По теореме Пифагора получаем $AK=\sqrt{AI^2-IK^2}=3\sqrt{5}$. Треугольники AKI и AHC подобные: $\angle AKI=\angle AHC=90^\circ$, $\angle IAK$ – общий. Тогда $\frac{IK}{HC}=\frac{AK}{AH}$, откуда $HC=\frac{IK\cdot AH}{AK}=\frac{6\cdot 15}{3\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$. Поскольку высота AH в равнобедренном треугольнике является медианой, получаем, что площадь $\triangle ABC$ равна $S_{ABC}=AH\cdot HC=90\sqrt{5}$.



Ответ: $90\sqrt{5}$.

B8. Решите уравнение: $|2x-1|+2|x-3|=5$.

Решение. Рассмотрим три случая раскрытия модулей:

1) $x < \frac{1}{2}$, тогда $1-2x-2(x-3) = 5$, или $4x = 2$. Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ и решений в этом случае нет;

2) $\frac{1}{2} \le x \le 3$, получаем уравнение $2x-1-2(x-3) = 5$, или $0 = 0$. Тождество выполняется при любом x, значит подходит весь отрезок $x \in [\frac{1}{2}; 3]$;

3) $x > 3$, тогда $2x-1+2(x-3) = 5$, или $4x = 12$. Получаем $x = 3$ и для этого случая решений нет.

Ответ: $x \in [\frac{1}{2}; 3]$.

B9. Ученики 9B класса написали тест. Если бы каждый мальчик получил на 3 балла больше, то средний результат класса был бы на $1,2$ балла выше. Сколько процентов составляют в этом классе девочки?

Решение. Обозначим через x - количество мальчиков, а через y - количество девочек в 9B классе. Пусть S - сумма всех баллов, набранных классом за тест; тогда средний результат класса равен $\frac{S}{x+y}$. Если бы каждый мальчик класса получил на 3 балла больше, суммарный результат класса был бы равен $S + 3x$; при этом средний результат класса станет равен $\frac{S+3x}{x+y}$. Используя соотношение между средними баллами составим уравнение: $\frac{S+3x}{x+y} = \frac{S}{x+y} + 1,2$. Упрощая уравнение получим $S + 3x = S + 1,2(x + y)$, откуда $3x = 1,2(x + y)$, т.е. $x = 0,4(x + y)$. Таким образом, в классе 40% составляют мальчики и, значит, 60% - девочки.

Ответ: 60%.

B10. Длина основания треугольника равна 36. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

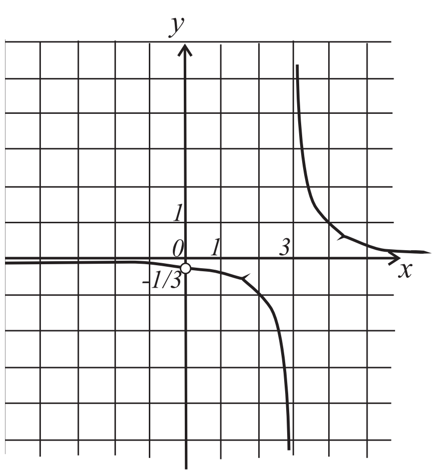
Решение. Этот отрезок отсекает от исходного треугольника подобный ему треугольник. Если площадь исходного треугольника равна S, то площадь отсеченного треугольника $- \frac{S}{2}$. Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия k, то $k = \sqrt{2}$. Тогда $\frac{36}{x} = \sqrt{2}$, и $x = \frac{36}{\sqrt{2}} = 18\sqrt{2}$.

Ответ: $18\sqrt{2}$.

B11. Постройте график функции $y = \frac{x}{x^2-3x}$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек.

Решение. Данная функция определена при $x \neq 0$, $x \neq 3$. Учитывая условие $x \neq 0$, получаем $y = \frac{1}{x-3}$. Графиком функции $y = \frac{x}{x^2-3x}$ является гипербола, на которой выколота точка с абсциссой $x = 0$. Рассматривая прямую $y = a$, параллельную оси абсцисс, находим, что при $a = 0$ и $a = -\frac{1}{3}$ (прямая $y = a$ проходит через точку с координатами $(0, -1/3)$) нет общих точек с графиком $y = \frac{x}{x^2-3x}$.

Ответ: $a = 0$ и $a = -\frac{1}{3}$.



Часть C

C1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 6, \\ xy + x - y = -5. \end{cases}$

Решение. Представим систему в следующем виде: $\begin{cases} xy(x-y) = 6, \\ xy + (x-y) = -5. \end{cases}$ Применим теорему Виета для решение системы относительно неизвестных $t = xy$ и $v = x - y$, получим два варианта: $\begin{cases} x - y = -2, \\ xy = -3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = -3, \\ xy = -2. \end{cases}$

Первая система решений не имеет. Из первого уравнения второй системы находим $x = y - 3$, тогда $y^2 - 3y + 2 = 0$, следовательно, $\begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: $(-1, 2)$ и $(-2, 1)$.

C2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение уравнение $(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3 = 0$.

Решение.

1) Если $a = \frac{5}{2}$, уравнение является линейным, оно имеет единственное решение $x = 1$.

2) Если $a \neq \frac{5}{2}$, то уравнение квадратное. Это уравнение будет иметь единственное решение только в том случае, когда дискриминант равен 0:

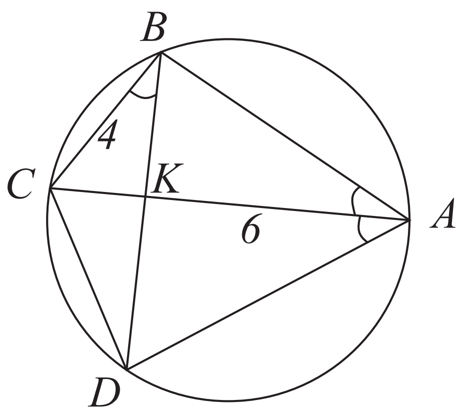
$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3(2a-5) = a^2 - 8a + 16 = (a-4)^2 = 0.$$

Следовательно, $a = 4$.

Ответ: $a = \frac{5}{2}$ и $a = 4$.

C3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла $\angle BAD$ и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$ и $AK = 6$.

Решение. Заметим, что $\angle BAC = \angle CAD = \angle CBD$, как углы, образованные биссектрисой, и вписанные углы, опирающиеся на общую дугу. Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle BKC$ подобны по двум углам, следовательно, выполняется отношение: $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{KC}$. Если обозначить неизвестное $KC = x$, получим квадратное уравнение $(x+6) \cdot x = 16$. Решая уравнение, приходим к ответу $x = 2$.



Ответ: $KC = 2$.

C4. Женя пригласила Тому в гости, сказав, что живет в 8 подъезде в квартире номер 468, а этаж сказать забыла. Подойдя к дому, Тома обнаружила, что дом двенадцатиэтажный. На каком этаже живет Женя, если номера квартир дома начинаются с единицы, и на всех этажах одинаковое число квартир?

Решение. Обозначим количество квартир на этаже через x, тогда в первых семи подъездах двенадцатиэтажного дома находится $7 \cdot 12 \cdot x$ квартир. Женя живет в 8 подъезде, значит номер ее квартиры больше максимального номера квартиры в предыдущем подъезде: $7 \cdot 12 \cdot x < 468 = 39 \cdot 12$.

Отсюда находим ограничение $7x < 39$. Поскольку x - натуральное число, $1 \le x \le 5$. Остается проверить получившиеся варианты расположения по x квартир на этаже:

1) если $x = 1$, то в первых восьми подъездах всего $8 \cdot 12 = 96$ квартир, значит, квартиры с номером 468 там нет;

2) если $x = 2$, то в первых восьми подъездах всего $8 \cdot 12 \cdot 2 = 192$ квартиры, значит, квартиры с номером 468 там нет;

3) для $x = 3$ окажется, что в первых восьми подъездах всего $8 \cdot 12 \cdot 3 = 288$ квартир, значит, квартиры с номером 468 там нет;

4) при $x = 4$ в первых восьми подъездах всего $8 \cdot 12 \cdot 4 = 384$ квартиры, значит, квартиры с номером 468 там нет;

и, наконец, 5) если $x = 5$, то в первых восьми подъездах $8 \cdot 12 \cdot 5 = 480$ квартир, а в первых семи всего $7 \cdot 12 \cdot 5 = 420$. Так как $9 < \frac{48}{5} < 10$, Тома сделает вывод, что Женя живет на 10 этаже дома.

Ответ: 10 этаж.

Вариант 2

Часть B

К заданиям части B приведите ***только ответ****, записав его в отведенном месте. Переписывать решение задачи в чистовик не нужно.*

B1. Какую цифру нужно дописать в конец числа 12468, чтобы получившееся число делилось на 18?

B2. Решите уравнение: $\frac{(2x-1)(2x+1)}{x-1} = 1 - 2x$.

B3. В окружности проведены хорды AB и AC, образующие угол 70°. Через точки B и C проведены касательные к окружности, пересекающиеся в точке K. Найдите угол $\angle BKC$.

B4. Решите неравенство: $(y-1)\sqrt{3+2y-y^2} \le 0$.

B5. Девятикласснице Свете нужно 50 секунд, чтобы спуститься пешком по едущему вниз эскалатору. Движущийся эскалатор опускает ее, стоящую на ступеньке, за 70 секунд. Сколько секунд нужно Свете, чтобы спуститься пешком по неподвижному эскалатору?

B6. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{(a+1)^2 - 4a}}$, если $0 < a < 1$.

B7. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 21, а радиус вписанной окружности равен 9. Найдите площадь треугольника.

B8. Решите уравнение: $2|x+1| + |2x-3| = 5$.

B9. Ученики 9Е класса написали тест. Если бы каждая девочка получил на 5 баллов больше, то средний результат класса был бы на 2 балла выше. Сколько процентов составляют в этом классе мальчики?

B10. Высота треугольника, проведенная к основанию, равна 24. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину части высоты, заключенной между основанием треугольника и проведенной параллельной прямой.

B11. Постройте график функции $y = \frac{x}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек.

Часть C

C1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy + x + y = 5, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$

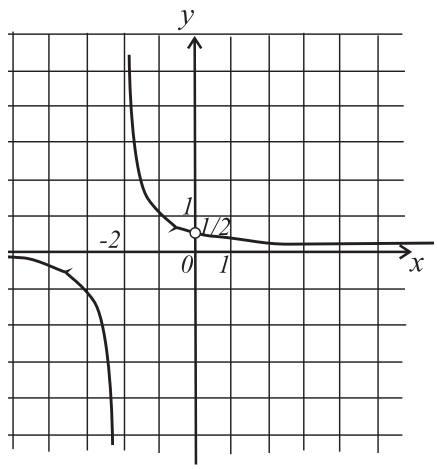
C2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение уравнение $(2a+3)x^2 + 2(a+3)x + 3 = 0$.

C3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ BD является биссектрисой угла $\angle ABC$ и пересекается с диагональю AC в точке N. Найдите AD, если $BN = 12$ и $ND = 3$.

C4. Соня пригласила Никиту в гости, сказав, что живет в 10 подъезде в квартире номер 333, а этаж сказать забыла. Подойдя к дому Никита обнаружил, что дом девятиэтажный. На каком этаже живет Соня, если номера квартир дома начинаются с единицы, и на всех этажах одинаковое число квартир?

Ответы к Варианту 2:

B1. 6 **B2.** $x = \frac{1}{2}$ и $x = 0$ **B3.** $40°$ **B4.** $x \in [-1; 1]$ и $x = 3$ **B5.** 175 **B6.** $-\frac{1}{a}$
B7. $189\sqrt{7}$ **B8.** $x \in [-1; \frac{3}{2}]$ **B9.** 60% **B10.** $24 - 12\sqrt{2}$ **B11.** $a = 0$ и $a = \frac{1}{2}$



C1. $(2, 1)$ и $(1, 2)$ **C2.** $a = -\frac{3}{2}$ и $a = 0$ **C3.** $3\sqrt{5}$ **C4.** 3