Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

B	C	Сумма	Балл (из 10)	Подпись

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный тест по математике
для поступающих в физико-химический и химико-биологический классы
СУНЦ УрФУ
3 мая 2016 года
Вариант 1

Часть B

К каждому заданию приведите только ответ.

B1. Вычислить $(\sqrt{10}-\sqrt{5})\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{2})^2}}$.

Ответ:________________

B2. Сократить дробь $\dfrac{1+4b-4a}{4a^2-4b^2-a-b}$.

Ответ:________________

B3. Овощи подешевели на 15%. Сколько овощей можно теперь купить на те же деньги, на которые раньше покупали 3,4 кг?

Ответ:________________

B4. В какой точке прямая, проходящая через точки $A(-13;75)$ и $B(15;-65)$ пересекает ось OX?

Ответ:________________

B5. В треугольнике ABC $\angle C=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $AC=6$. Найти радиус описанной окружности.

Ответ:________________

B6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{4}{5}, \\ x-y=4. \end{cases}$

Ответ:________________

B7. Решить уравнение: $|1-|x^2-6||=2$.

Ответ:________________

B8. Решить неравенство $\dfrac{2+x^2}{x-1}\leqslant\dfrac{1}{3}$.

Ответ:________________

B9. Биссектриса равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найти его площадь.

Ответ:________________

Часть C

К заданиям приведите полное решение.

C1. Упростить выражение $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-3}{3\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}$.

C2. Решить уравнение $2x^4-5x^3-18x^2+45x=0$.

C3. При каких значениях a расстояние между корнями уравнения $x^2-2ax+\frac{3}{4}a^2=0$ равно 1?

C4. Точка O лежит на средней линии трапеции $ABCD$, где M — середина боковой стороны AB, N — середина боковой стороны CD. Прямые BO и CO пересекают основание AD в точках K и L соответственно. Найти отношение $MO:ON$, если $AL:LK:KD=2:3:1$.

Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

B	C	Сумма	Балл (из 10)	Подпись

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный тест по математике
для поступающих в физико-химический и химико-биологический классы
СУНЦ УрФУ
3 мая 2016 года
Вариант 2

Часть B

К каждому заданию приведите только ответ.

B1. Вычислить $(\sqrt{8}+\sqrt{10})\sqrt{32(2-\sqrt{5})^2}$.
Ответ:________________

B2. Сократить дробь $\dfrac{5y-5x-1}{x+y+5x^2-5y^2}$.
Ответ:________________

B3. Бананы подорожали на 30%. Сколько бананов можно теперь купить на те же деньги, на которые раньше покупали 2,6 кг?
Ответ:________________

B4. В какой точке прямая, проходящая через точки $A(24;-3)$ и $B(-28;10)$ пересекает ось OX?
Ответ:________________

B5. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $BC = 6$. Найти радиус описанной окружности.
Ответ:________________

B6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8}, \\ x+y=12. \end{cases}$
Ответ:________________

B7. Решить уравнение: $||x^2-5|-1|=3$.
Ответ:________________

B8. Решить неравенство $\dfrac{4+x^2}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Ответ:________________

B9. Площадь равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найти его медиану.
Ответ:________________

Часть C

К заданиям приведите полное решение.

C1. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{2-a}-\frac{5}{\sqrt{2+a}}}{\frac{5}{\sqrt{4-a^2}}-1}$.

C2. Решить уравнение $2x^4+3x^3-8x^2-12x=0$.

C3. При каких значениях a расстояние между корнями уравнения $x^2-3ax+\frac{5}{4}a^2=0$ равно 2?

C4. Одна из двух параллельных прямых пересекает стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ в точках K и L, а другая – стороны CD и AD в точках M и N соответственно. Найти отношение $DM : MC$, если $AK : KB = 1:2$, $BL : LC = 2:3$ и $AN : ND = 4:1$.

Ответы и решение к части B

B1. $(\sqrt{10}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{2})^2}}=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)\frac{2\sqrt{5}}{|1-\sqrt{2}|}=\frac{2\cdot5\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}=10.$

B2. $\frac{1+4b-4a}{4a^2-4b^2-a-b}=\frac{1+4b-4a}{4(a-b)(a+b)-(a+b)}=\frac{1+4b-4a}{(a+b)(4(a-b)-1)}=\frac{-(-1-4b+4a)}{(a+b)(4a-4b-1)}=-\frac{1}{a+b}.$

B3. Пусть x первоначальная цена 1 килограмма овощей, тогда на покупку овощей потрачено $3,4x$ рублей. После изменения цены стоимость одного килограмма овощей стала $0,85x$ рублей. Разделив общую сумму $3{,}4x$ на новую цену $0{,}85x$, получим, что теперь можно будет купить 4кг овощей.

Ответ: 4 кг.

B4. Точки $A(-13;75)$ и $B(15;-65)$ лежат на прямой $y=kx+b$. Подставим координаты точек A и B в общее уравнение прямой и найдем k и b.

$$\begin{cases}75=k\cdot(-13)+b,\\ -65=k\cdot15+b.\end{cases}$$

После вычитания из первого второго уравнений, получим $140=-28k$ или $k=-5$. Подстановкой находим $b=10$. Уравнение искомой прямой имеет вид $y=-5x+10$. Точку пересечения с осью абсцисс находим при $y=0$, т.е. $x=2$.

Ответ: $(2;0)$.

B5. Треугольник ABC — прямоугольный, поэтому $\sin\angle B=\frac{AC}{AB}$, откуда $AB=\frac{6}{\sin 60^\circ}=\frac{6\cdot2}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$. Радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, т.е. $2\sqrt{3}$.

B6. Преобразуем систему к виду $\begin{cases}x=4+y,\\ \frac{1}{4+y}-\frac{1}{y}+\frac{4}{5}=0.\end{cases}$ Домножив второе уравнение системы на $5y(4+y)$, получим $5y-5(4+y)+4y(4+y)=0$ или $y^2+4y-5=0$, откуда $y_1=-5$, $y_2=1$. Подстановкой находим $x_1=-1$ и $x_2=5$.

Ответ: $(-1,-5)$; $(5,1)$.

B7. $|1-|x^2-6||=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-|x^2-6|=2,\\ 1-|x^2-6|=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x^2-6|=-1,\\ |x^2-6|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6=3,\\ x^2-6=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=9,\\ x^2=3.\end{array}\right.$

Ответ: $x=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm3$.

B8. Приводя к общему знаменателю, получим $\frac{3x^2-x+7}{(x-1)\cdot3}\leqslant0$.

При решении уравнения $3x^2-x+7=0$ обнаруживаем, что $D=1-4\cdot3\cdot7<0$, поэтому $3x^2-x+7>0$ для любого x, значит исходное неравенство выполняется при $x-1<0$.

Ответ: $x<1$.

B9. Пусть ABC — равносторонний треугольник, его биссектриса AM (одновременно медиана и высота) равна $2\sqrt{3}$. Из треугольника ABM находим $AB=\frac{AM}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}=4$. Отсюда

$$S_\triangle=\frac{1}{2}AM\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot4=4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Ответы и решение к части C

C1. На ОДЗ возможна следующая цепочка преобразований

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-3\right):\left(3\cdot\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=\left(\frac{1-3\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right):\frac{3\cdot\sqrt{(x-1)(x+1)}-1}{\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{1-3\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{3\cdot\sqrt{x^2-1}-1}=-\frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

C2. Используя вынесение за скобки и группировку, получим

$$x(2x^3-18x-5x^2+45)=0 \Leftrightarrow x(2x(x^2-9)-5(x^2-9)=0 \Leftrightarrow x(x^2-9)(2x-5)=0,$$

откуда $x=0$, $x=\pm3$, $x=\frac{5}{2}$.

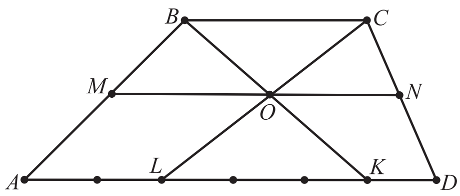
Ответ: $x=0$, $x=\pm3$, $x=\frac{5}{2}$.

C3. Для уравнения $x^2-2ax+\frac{3}{4}a^2=0$ находим $\frac{D}{4}=a^2-\frac{3}{4}a^2=\frac{a^2}{4}$. Отсюда $x_{12}=a\pm\frac{a}{2}$ или $x_1=\frac{a}{2}$, $x_2=\frac{3a}{2}$. По условию задачи $|x_1-x_2|=1$, т.е. $|\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}|=1$, откуда $|a|=1$ или $a=\pm1$.

Ответ: при $a=\pm1$ расстояние между корнями уравнения равно 1.

C4. Средняя линия MN параллельна основаниям, поэтому по теореме Фалеса прямая MN делит отрезки BK и CL пополам. Значит $[MO]$ — средняя линия треугольника ABK и $[ON]$ — средняя линия треугольника CLD. Пусть $AD=6x$, тогда $AK=5x$, следовательно $MO=\frac{5x}{2}$. Аналогично $DL=4x$ и $ON=2x$. То есть искомое отношение равно $MO:ON=\frac{5x}{2}:2x=\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{MO}{ON}=\frac{5}{4}$.



Вариант 2

Ответы к части B

B1. 8. **B2.** $-\frac{1}{x+y}$. **B3.** 2кг. **B4.**$(12,0)$. **B5.** $2\sqrt{3}$. **B6.** $(4;8)$; $(8;4)$. **B7.** $x=\pm1$, $x=\pm3$. **B8.** $x>-1$. **B9.** $2\sqrt{3}$.

Ответы к части C

C1. $-\sqrt{2-a}$. **C2.** $x=0$, $x=\pm2$, $x=-\frac{3}{2}$. **C3.** $a=\pm1$. **C4.** $DM:MC=1:2$.