Летняя школа — 2016
Итоговая контрольная работа

1 вариант

1. Решить неравенство $\dfrac{|x-2|-1}{\sqrt{4-3x}+x} \geqslant 0.$

2. а) Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{x}\right) \leqslant 0.$$

б) Найти эти значения параметра a, при которых решение неравенства

$$\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{x}\right) \leqslant 0$$

содержит ровно одно отрицательное число.

3. В вершинах выпуклого шестиугольника записаны числа 8, 3, 12, 1, 10, 6 (в указанном порядке). За ход разрешается к любым двум числам в соседних вершинах прибавить одно и то же число. Можно ли за несколько таких ходов получить в последовательном порядке шестерку чисел 25, 22, 24, 26, 33, 24?

4. Внутри окружности с центром O выбрана точка M и через нее проведены две хорды — AB и CD. Известно, что $AM = 8$, $MB = 2$ и $CM = 4$. Найти величину $\angle OMD$.

5. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Известно, что $AM = 4$, $MB = 1$ и $BC = 3$. Найти площадь трапеции.

6. Доказать, что если окружность касается трёх сторон выпуклого четырёхугольника и не пересекает четвёртой стороны, то сумма четвёртой и противоположной ей стороны меньше суммы остальных сторон четырёхугольника.

Летняя школа — 2016
Итоговая контрольная работа

2 вариант

1. Решить неравенство $\dfrac{|x+2|-1}{\sqrt{4+3x}-x} \leqslant 0$.

2. а) Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{x}\right) \geqslant 0.$$

б) Найти эти значения параметра a, при которых решение неравенства

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{x}\right) \geqslant 0$$

содержит ровно одно положительное число.

3. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – отважным, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?

4. Внутри окружности с центром O выбрана точка M и через нее проведены две хорды — AB и CD. Известно, что $AM = 9$, $MB = 1$ и $CM = 3$. Найти величину $\angle OMC$.

5. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, которая касается боковой стороны AD в точке K. Известно, что $AK = 8$, $KD = 2$ и $DC = 6$. Найти площадь трапеции.

6. Доказать, что если окружность касается трёх сторон выпуклого четырёхугольника и пересекает четвёртую сторону, то сумма четвёртой и противоположной ей стороны больше суммы остальных сторон четырёхугольника.

Решение задач итоговой контрольной работы по математике

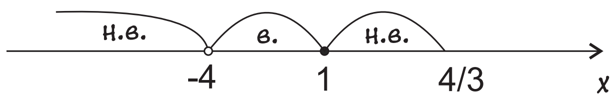
1 вариант

1. Решим методом интервалов.

ОДЗ данного неравенства $\sqrt{4-3x}+x \neq 0$ и $4-3x \geqslant 0$. Из первого условия найдем $x \neq -4$, из второго $x \leqslant 4/3$.

Найдем нули числителя: $|x-2|-1=0$. Корни этого уравнения $x=1$, $x=3$. Второй корень не входит в ОДЗ.

Теперь отметим на числовой прямой ОДЗ знаменателя выколотыми, а нули числителя закрашенными. После чего определим знаки левой части на образовавшихся промежутках:

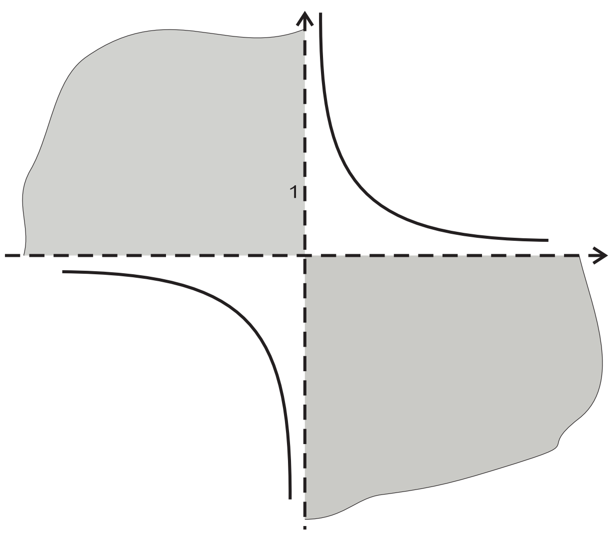


Ответ: $x \in (-4, 1]$.

2. Сначала изобразим пунктиром линии, соответствующие ОДЗ уравнения: $x \neq 0$ и $a \neq 0$.

Потом изобразим линии соответствующие равенству $\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{x}\right)=0$. Произведение равно нулю, когда один из сомножителей равен нулю. Приравнивая каждую из скобок к нулю, получаем одну и ту же линию — гиперболу.

Получилось на графике 4 линии, которые разбивают плоскость на 6 частей. Проверяя области, находим две подходящие.



Теперь видно, что решение содержит ровно одно отрицательное число, только при $a<0$.

3. Для шестерки $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ рассмотрим знакопеременную сумму

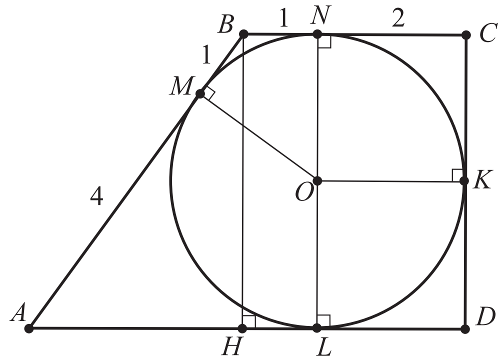
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6.$$

При указанных преобразованиях она не меняется. Осталось лишь заметить, что у указанных шестерок она различается.

4. По теореме о хордах $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Отсюда $MD = 4$ и M — середина отрезка CD. Используя свойство медианы равнобедренного треугольника (OC и OD — радиусы окружности), получим $(OM) \perp (CD)$.

Ответ. 90°.

5.

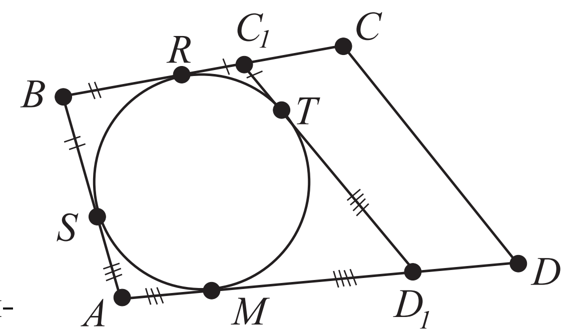


Воспользуемся обозначениями рисунка. По теореме об отрезках касательных получим $AL = AM = 4$ и $BN = BM = 1$, поэтому $CN = 2$.

Опустив высоту BH, можем найти $HL = BN = 1$ и $AH = AL - LH = 3$. Из прямоугольного треугольника ABH сразу получим $BH = 4$, поэтому радиус вписанной окружности равен $BH/2 = 2$.

В четырехугольнике $ONCK$ выполняются $CK = CN = 2 = ON = OK$ и $\angle ONC = 90^\circ$, поэтому $ONCK$ — квадрат и данная трапеция является прямоугольной с основаниями $BC = 3$ и $AD = 6$. Остается найти $S_{ABCD} = (AD + BC)BH/2 = 18$.

Ответ: 18.



6.

Вспомним доказательство теоремы о вписанной в четырехугольник окружности.

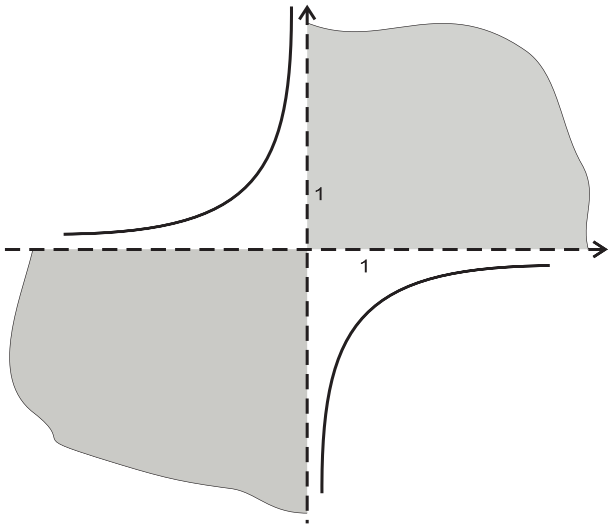
Требуется доказать, что $AB+CD < BC+AD$. Перепишем требуемое неравенство: $AS+SB+CD < BR+RC_1+C_1C+AM+MD_1+D_1D$. Используя теорему об отрезках касательных сократим равные отрезки $CD < RC_1 + C_1C + MD_1 + D_1D = C_1T + C_1C + TD_1 + D_1D = C_1C + C_1D_1 + D_1D$. А полученное неравенство верно по неравенству треугольника.

Ответы и критерии оценок

2 вариант

1. Ответ: $x \in [-4/3, -1] \cup (4, +\infty)$.

2. Решение аналогично первому варианту, приведем лишь рисунок.



Ответ: $a < 0$.

3. Каждый отважный ребенок уменьшает количество однополых пар на 1. Каждый неотважный ребенок увеличивает количество однополых пар на 1. В начале однополых пар не было, в конце их тоже не было. Следовательно, число отважных детей равно числу неотважных.

Ответ: 10 отважных.

4. Ответ: 90°.

5. $S_{ABCD} = 72$.

Критерии оценок

Максимальный балл за работу — 19.

1. Верное решение оценивается в 3 балла.
Верно найдено ОДЗ — 1 балл.
Верно найден корень числителя, входящий в ОДЗ — 1 балл.
Верно определены области — 1 балл.

2. Верное решение оценивается в 4 балла.
Верно построено ОДЗ — 1 балл.
Верно построена гипербола — 1 балл.
Верно определены области — 1 балл.
Верный ответ на пункт б) — 1 балл.

3. Верное решение оценивается в 3 балла.
Указан инвариант — 1 балл.
Доказан инвариант — 1 балл.
Посчитаны начальные и конечные значения — 1 балл.

4. Верное решение оценивается в 3 балла.
Верное использование теоремы о хордах — 1 балл.
Свойство медианы равнобедренного треугольника — 2 балла.

5. Верное решение оценивается в 4 балла.
Верное использование теоремы о касательных — 1 балл.
Правильно найденный радиус вписанной окружности — 1 балл.
Правильно найдено второе основание трапеции — 1 балл.
Верно подсчитанная площадь — 1 балл

6. Верное решение оценивается в 2 балла.
Рассмотрен нужный описанный четырехугольник — 1 балл.
Применено нужное неравенство треугольника — 1 балл.