Геометрия ЛШ — 2015

1 вариант

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, а его диагонали пересекаются в точке K. Известно, что $\angle ABC = 114°$, $\angle BAD = 78°$ и $\angle BDA = 39°$.

а) Найти величину угла DBC.

б) Найти величину угла AKD.

Решение. а) В треугольнике ABD выполняется (рис. 1): $\angle ABD = 180° - 78° - 39° = 63°$. Тогда $\angle DBC = 114° - 63° = 51°$.

б) $\angle BCA = \angle BDA = 39°$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

В треугольнике BKC выполняется: $\angle BKC = 180° - \angle KBC - \angle BCK = 180° - 51° - 39° = 90°$. Заметим, что $\angle AKD = \angle BKC = 90°$.

Ответ: а) $51°$, б) $90°$.

Критерии оценок. Верно определенный угол из (а) — 1 балл. Верно определенный угол из (б) — 2 балла.

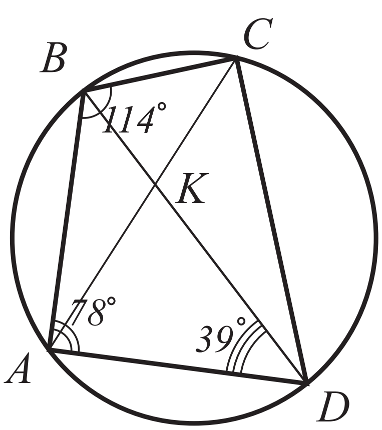

Рис. 1

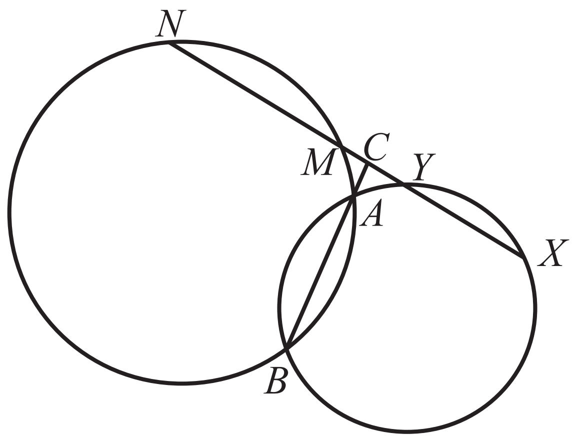

Рис. 2

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. На продолжении хорды AB за точку A взята точка C и через неё проведена прямая, пересекающая одну окружность в точках X и Y, а другую — в точках M и N, причем на этой прямой точки идут в следующей порядке: X, Y, C, M, N. Найти длину отрезка XN, если известно, что $AB = 3$, $AC = 2$, $XY = 3/2$, $CM = 1$.

Решение. По теореме о секущих $CY \cdot CX = CA \cdot CB$ (рис. 2), отсюда $CY(CY + 1,5) = 2 \cdot 5$ и получим $CY = 5/2$. Для второй окружности и её секущих из точки C получаем: $CM \cdot CN = CA \cdot CB$, откуда $1 \cdot (1 + MN) = 10$ и $MN = 9$. Искомый отрезок $XN = XY + CY + CM + MN = 14$.

Ответ: $XN = 14$.

Критерии оценок. Верное применение теоремы о касательной и секущей для одной окружности — 2 балла. Правильное применение теоремы о касательной и секущей для второй окружности — 2 балла.

3. Центры двух окружностей радиусов 3 и 1 находятся на расстоянии 7. Найти наибольшее расстояние между точками A и B, лежащими на этих окружностях (и доказать, что оно наибольшее).

Решение. Если точки лежат на одной окружности, то расстояние между ними не больше диаметра. Пусть теперь A лежит на окружности с радиусом 3, B — на окружности радиуса 1 (рис. 3). По следствию из неравенства треугольника длина отрезка не больше длины ломаной, концы которой совпадают с концами отрезка, поэтому $AB \leqslant AO_3 + O_3O_1 + O_1B = 3 + 7 + 1 = 11$. Значение 11 достигается, когда A и B лежат на прямой O_3O_1, причем отрезок AB содержит точки O_3 и O_1.

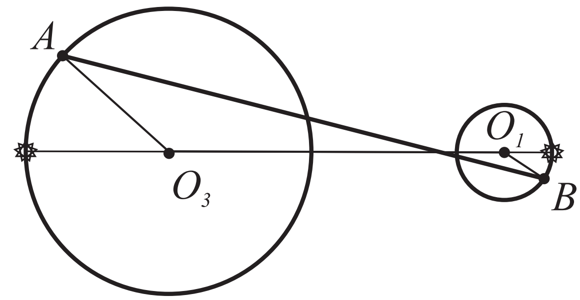

Рис. 3

Ответ: 11.

Критерии оценок. Правильная оценка — 2 балла. Приведение примера (на котором достигается наибольшее расстояние) — 1 балл.

Геометрия ЛШ — 2015

2 вариант

1. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность, а его диагонали пересекаются в точке P. Известно, что $\angle BCD = 108^\circ$, $\angle CBA = 94^\circ$ и $\angle CAB = 27^\circ$.

а) Найти величину угла ACB.

а) Найти величину угла APD.

Ответ: а) 59°, б) 76°.

Критерии оценок. Верно определенный угол из (а) — 1 балл. Верно определенный угол из (б) — 2 балла.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. На продолжении хорды AB за точку A взята точка C и через неё проведена прямая, пересекающая одну окружность в точках X и Y, а другую — в точках M и N, причем точки на прямой идут в следующем порядке: C, X, M, N, Y. Найти длину отрезка YN, если известны длины $AB = 3$, $AC = 2$, $CX = 1$, $MN = 3/2$.

Ответ: $YN = 6$.

Критерии оценок. Верное применение теоремы о секущих для одной окружности — 2 балла. Правильное применение теоремы о секущих для второй окружности — 2 балла.

3. Центры двух окружностей радиусов 7 и 3 находятся на расстоянии 1. Найти наибольшее расстояние между точками A и B, лежащими на этих окружностях (и доказать, что оно наибольшее) при условии, что эти точки лежат на разных окружностях.

Ответ: 11.

Критерии оценок. Правильная оценка — 2 балла. Приведение примера (на котором достигается наибольшее расстояние) — 1 балл.