Алгебра, ЛШ–2015

1 вариант

1. Решите методом интервалов неравенство $(x^2-18x+77)\sqrt{10-x}\geqslant 0$.

2. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{2x+3y-8}{y^2-4x^2}\leqslant 0$.

б) При каких значениях параметра a во множестве решений неравенства $\dfrac{2x+3a-8}{a^2-4x^2}\leqslant 0$ содержится число 1?

в) При каких значениях параметра a во множестве решений данного неравенства содержится интервал $(-1;1)$?

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $(a-1)x^2+2ax+a-4=0$ удовлетворяет условию $x<3$.

Алгебра, ЛШ–2015

2 вариант

1. Решите методом интервалов неравенство $(x+2)\sqrt{x^2+7x+6}\geqslant 0$.

2. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{x-6y-8}{4y^2-x^2}\leqslant 0$.

б) При каких значениях параметра a во множестве решений неравенства $\dfrac{x-6a-8}{4a^2-x^2}\leqslant 0$ содержится число 2?

в) При каких значениях параметра a во множестве решений данного неравенства содержится интервал $(-2;2)$?

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $(a+1)x^2+2ax+a+3=0$ удовлетворяет условию $x<2$.

Решение задач контрольной работы по алгебре

1 вариант

1. Решите методом интервалов неравенство $(x^2-18x+77)\sqrt{10-x}\geqslant 0$.

Решение. Найдем ОДЗ: $10-x\geqslant 0$, т.е. $x\leqslant 10$. Решим уравнение

$$(x^2-18x+77)\sqrt{10-x}=0 \qquad (1)$$

Оно равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} x\leqslant 10, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-18x+77=0, \\ 10-x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 10, \\ \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=11, \\ x=10. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Точка $x=11$ не входит в ОДЗ, таким образом, корнями уравнения (1) являются $x=7$ и $x=10$. Отметим на числовой прямой эти точки и ОДЗ (рис. 1). Взяв из каждого полученного промежутка по точке и подставив соответствующее значение в исходное неравенство, получаем, что $x\in(-\infty;7]\cup\{10\}$.

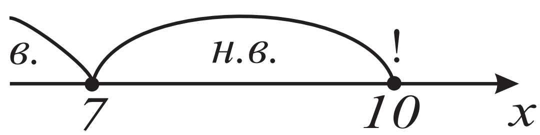


Рис. 1

Ответ: $x\in(-\infty;7]\cup\{10\}$.

Критерии оценок. Верно найденное ОДЗ — 1 балл. Верно решенное уравнение — 1 балл. Изолированный корень — 1 балл. Правильно найденный промежуток — 1 балл.

2. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{2x+3y-8}{y^2-4x^2}\leqslant 0$.

б) При каких значениях параметра a во множестве решений неравенства $\dfrac{2x+3a-8}{a^2-4x^2}\leqslant 0$ содержится число 1?

в) При каких значениях параметра a во множестве решений данного неравенства содержится интервал $(-1;1)$?

Решение. а) В ОДЗ данного неравенства не входят только решения уравнения $y^2-4x^2=0$. После разложения по формуле разности квадратов получим две прямые — $y = 2x$ и $y = -2x$, которые изобразим на плоскости штриховыми (рис. 2).

Решением уравнения, соответствующего данному неравенству, является множество всех точек прямой $2x + 3y - 8 = 0$, которые входят в ОДЗ (эту прямую надо изобразить сплошной линией, выбросив из нее две точки). Точки пересечения прямой $2x + 3y - 8 = 0$ с прямыми $y = 2x$ и $y = -2x$ легко находятся из решения двух линейных систем. Эти две выколотые точки имеют координаты $(1, 2)$ и $(-2, 4)$. Построенные прямые разбивают плоскость на семь областей. Подставляя в исходное неравенство точки $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 10)$ и $(-8, 10)$ убеждаемся, что ему удовлетворяют лишь точки заштрихованных на рисунке областей.

б) Рассмотрим рисунок к предыдущей задаче и проведем вертикальную прямую $x = 1$. Убеждаемся, что полученное множество содержит точки этой прямой только если их вторая координата меньше -2 (напомним, что точка $(1, 2)$ не входит во множество решений). Ответ: $a < -2$.

в) Снова рассмотрим рис. 2 пересечем найденное множество с горизонтальной линией $y = a$. Требуется, чтобы это пересечение содержало все точки с абсциссами из интервала $(-1; 1)$. Нетрудно заметить (проводя две вертикальные прямые $x = -1$ и $x = 1$), что это условие выполняется при $a = 2$ и $a \leqslant -2$. **Ответ:** $a = 2$ и $a \leqslant -2$.

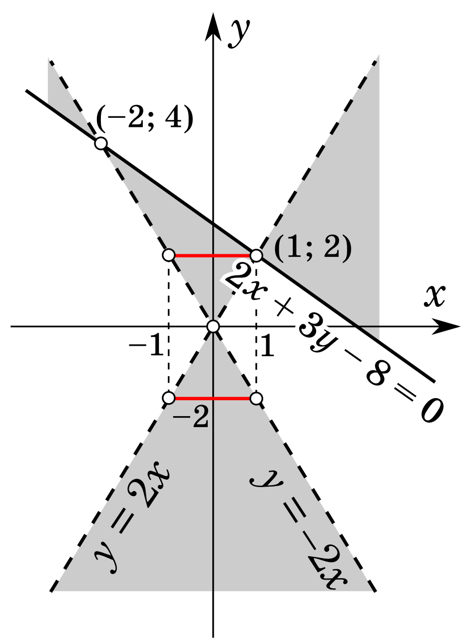


Рис. 2

Критерии оценок. Верно построены три прямые — 2 балла, найдены точки пересечения — 1 балл, определены области — 1 балл, верный ответ в (б) — 1 балл, верный ответ на пункт (в) — 2 балла.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $(a - 1)x^2 + 2ax + a - 4 = 0$ удовлетворяет условию $x < 3$.

Решение. Рассмотрим несколько случаев.

1) При $a = 1$ получаем линейное уравнение $2x - 3 = 0$, корень которого $x = 1{,}5$ удовлетворяет условию задачи.

При $a \neq 1$ имеем квадратное уравнение с дискриминантом $D = 20a - 16$.

2) $D = 0$ при $a = 0{,}8$. Тогда уравнение имеет единственный корень $x = 4$, не удовлетворяющий условию задачи.

3) Уравнение имеет два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $x_1 < 3 < x_2$, если $(a-1)f(3) < 0$, где $f(x) = (a-1)x^2 + 2ax + a - 4$. Получаем неравенство $(a-1)(16a-13) < 0$, решением которого является интервал $(\frac{13}{16}; 1)$.

4) Один из корней уравнения строго меньше 3, а второй равен 3.

Данное уравнение имеет 3 в качестве корня при $a = \frac{13}{16}$, тогда оно примет вид $-\frac{3}{16}x^2 + \frac{26}{16}x - \frac{51}{16} = 0$, откуда находим второй корень уравнения $x = \frac{17}{3}$, но он не удовлетворяет условию задачи.

Итак, только случаи 1) и 3) дают значения a, при которых выполняется условие задачи. Объединяя эти решения, получаем $a \in (\frac{13}{16}; 1]$.

Ответ: $a \in (\frac{13}{16}; 1]$.

Критерии оценок. Линейный случай оценивается в 1 балл. Нулевой дискриминант и проверка кратного корня оценивается в 1 балл. Верно найденный промежуток оценивается в 1 балл. Проверка граничного значения промежутка также оценивается в 1 балл.

Ответы и критерии оценок

2 вариант

1. Решите методом интервалов неравенство $(x+2)\sqrt{x^2+7x+6} \geqslant 0$.
Ответ: $x \in \{-6\} \cup [-1; \infty)$.

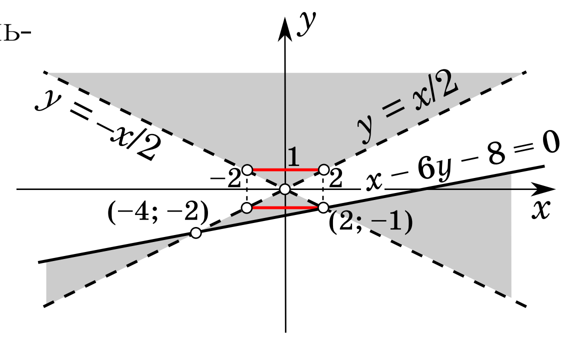
Критерии оценок. Верно найденное ОДЗ — 1 балл. Верно решенное уравнение — 1 балл. Изолированный корень — 1 балл. Правильно найденный промежуток — 1 балл.

2. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{x-6y-8}{4y^2-x^2} \leqslant 0$.

б) При каких значениях параметра a во множестве решений неравенства $\dfrac{x-6a-8}{4a^2-x^2} \leqslant 0$ содержится число 2?

в) При каких значениях параметра a во множестве решений данного неравенства содержится интервал $(-2; 2)$?

Решение. а) Решение полностью аналогично первому варианту; приведем только рисунок.



б) **Ответ:** $a > 1$.

в) **Ответ:** $a \geqslant 1$, $a = -1$.

Критерии оценок. Верно построены три прямые — 2 балла, найдены точки пересечения — 1 балл, определены области — 1 балл, верный ответ в (б) — 1 балл, верный ответ на пункт (в) — 2 балла.

3. Ответ: $a \in [-1; -\frac{7}{9})$.

Критерии оценок. Линейный случай оценивается в 1 балл. Нулевой дискриминант и проверка кратного корня оценивается в 1 балл. Верно найденный промежуток оценивается в 1 балл. Проверка граничного значения промежутка также оценивается в 1 балл.