ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

к вступительной работе для поступающих в 10 физ-мат, мат-эк, соц-эк (подгруппа экономического профиля), мат-инф, физ-тех и политех классы

2 мая 2015 года

Вариант 1

Часть 1

1. *Решите неравенство* $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{5}$.

Перенесем всё в левую часть и приведем к общему знаменателю, после чего применим метод интервалов: $\frac{5-x}{5x} \leqslant 0$; $x \in (-\infty; 0) \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [5; +\infty)$.

2. *Деревни Смирновка и Щербаковка, между которыми 6 км, соединены прямолинейной дорогой. В Смирновке живет 10 школьников, а в Щербаковке 20 школьников. На каком расстоянии от Смирновки надо построить школу, чтобы сумма расстояний, проходимых от своей деревни до школы всеми школьниками, была наименьшей? (Размерами деревень пренебречь.)*

Мысленно образуем пары из школьников: каждому школьнику из Смирновки сопоставим школьника из Щербаковки; при этом 10 школьников из Щербаковки останутся «одинокими». Понятно, что сумма расстояний, проходимых каждой парой, не зависит от расположения школы и равна 6 км. Поэтому общая сумма расстояний будет наименьшей тогда, когда наименьшей будет сумма расстояний, проходимых одинокими школьниками из Щербаковки. Следовательно, школу нужно построить в Щербаковке.

Ответ: 6 км.

3. *Одна ручка стоит 18 рублей. Вася купил некоторое количество таких ручек, но сумма покупки плохо пропечаталась в чеке, и он увидел там «3*2 руб.» (непропечатанная цифра обозначена звездочкой). Сколько ручек купил Вася?*

Очевидно, сумма покупки делится на 18, поэтому она делится и на 9, следовательно, ее сумма цифр делится на 9. Значит, на месте звездочки стоит цифра 4, то есть общая сумма покупки 342 рубля, а количество ручек равно $342 : 18 = 19$.

Ответ: 19 ручек.

4. *Решите уравнение* $x(x+7)-7(x-1)=x^2+7$.

Преобразовав уравнение, видим, что при любом значении x получается верное равенство. Следовательно, любое x является корнем уравнения.

Ответ: $x -$ любое число.

5. *Решите уравнение* $\sqrt{2x+3}=x$.

Возводя обе части в квадрат, получим $2x+3=x^2$, откуда $x_1=-1$, $x_2=3$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 -$ посторонний корень.

Ответ: $x=3$.

6. *Одно и то же количество одинаковых бобров ежегодно строит одинаковую плотину. На сколько процентов увеличится время постройки плотины, если количество бобров уменьшить на 20%?*

Если x бобров строят плотину за y часов, то трудоемкость работы составляет xy бобро-часов. Значит, $0{,}8x$ бобров построят плотину за время, равное $(xy):(0{,}8x)=1{,}25y$.

Ответ: на 25% .

7. *Даны функции* $y=kx+b$ $(k\geq 0)$ *и* $y=3+\dfrac{1}{x}$. *Какими должны быть* k *и* b, *чтобы графики этих функций имели одну (и не более) общую точку?*

Ровно одна общая точка у этих двух графиков будет тогда и только тогда, когда график линейной функции параллелен оси абсцисс и не проходит через точку (0; 3).

Ответ: $k=0$, $b\neq 3$.

8. *Отношение радиуса вписанной в правильный n-угольник окружности к радиусу описанной около него окружности равно* $\sin 70^\circ$. *Найдите n.*

Так как $\sin 70^\circ=\cos 20^\circ$, а указанное в условии отношение равно $\cos\dfrac{180^\circ}{n}$, получаем: $180/n=20$, откуда $n=9$.

Ответ: $n=9$.

9. *Решите уравнение* $\sqrt{9-6x+x^2}=x-3$.

Данное уравнение равносильно уравнению $|3-x|=x-3$. Если $x\geq 3$, это уравнение превращается в тождество. Если же $x<3$, правая часть отрицательна и уравнение решений не имеет.

Ответ: $x\geq 3$.

Часть 2

10. *В сельской больнице было всего три пациента: Хороших, всегда говоривший правду, Плохих, всегда лгавший, и Черезразов, попеременно говоривший то правду, то ложь. Ночью у дежурной медсестры раздался звонок по внутренней связи: «Умираю...» — «А вы кто?» — уточнила медсестра. — «Я не Хороших...». Кого должна бежать спасать от смерти медсестра?*

Хороших звонить не мог, так как тогда второе его высказывание было бы ложным. Плохих также звонить не мог, потому что иначе из его второго высказывания получилось бы, что он Хороших. Следовательно, звонил Черезразов, и тогда его второе высказывание истинно, поэтому первое ложно, следовательно, его спасать от смерти не надо.

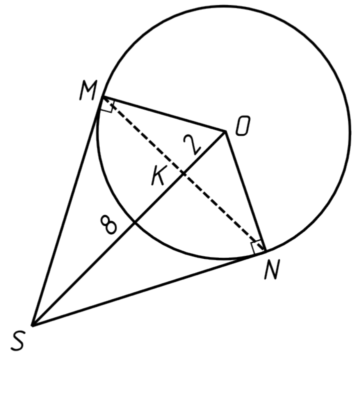
Ответ: спасать от смерти никого не надо.

11. *Пакет с семечками пустили по кругу. Первый взял 1 семечку, второй 2, и так далее (каждый следующий брал на 1 семечку больше, чем предыдущий). Оказалось, что количество семечек, взятых всеми сидящими на четвертом круге, на 128 больше, чем на втором круге. Сколько людей сидело в кругу?*

Пусть всего было n человек. Тогда очевидно, что каждый человек на следующем круге брал на n семечек больше, чем на предыдущем; следовательно, все люди на следующем круге брали на $n \cdot n = n^2$ семечек больше, чем на предыдущем. Поэтому на четвертом круге было взято на $2n^2$ семечек больше, чем на втором. Таким образом, $2n^2 = 128$, откуда $n = 8$.

Ответ: 8.

12. *Окружность с центром O касается сторон угла MSN в точках M и N; отрезки SO и MN пересекаются в точке K, при этом $SK = 8$, $OK = 2$. Найдите площадь четырехугольника $SMON$.*



Отрезки SM и SN равны как отрезки касательных, проведенных из одной точки, поэтому треугольник MSN − равнобедренный. OM и ON − радиусы, поэтому точка O равноудалена от сторон угла и, следовательно, SO − биссектриса угла MSN. Биссектриса SK треугольника MSN является также его высотой и медианой, поэтому $MN \perp SO$, $MK = KN$. Используя тот факт, что высота MK прямоугольного треугольника SMO, проведенная к гипотенузе, равна среднему геометрическому отрезков гипотенузы, получим: $MK = 4$, $MN = 8$. Площадь четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине их произведения, поэтому $S_{SMON} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40.$

Замечание. Для нахождения MN можно было заметить, что четырехугольник $SMON$ – вписанный, и воспользоваться теоремой об отрезках пересекающихся хорд.

Ответ: $S_{SMON} = 40$.

13. *Найдите все такие значения b, что при любых значениях a система уравнений* $\begin{cases} 3x+y=a, \\ ax-y=b. \end{cases}$ *имеет хотя бы одно решение.*

Первый способ. Перепишем систему в виде $\begin{cases} y=-3x+a, \\ y=ax-b. \end{cases}$ Каждое ее уравнение задает на плоскости Oxy некоторую прямую. Угловой коэффициент первой прямой равен -3, а угловой коэффициент второй прямой равен a. Если $a = -3$, то прямые либо параллельны, либо совпадают; система имеет хотя бы одно решение, когда они совпадают, то есть $b = -a = 3$. Если же $a \neq -3$, то прямые пересекаются, то есть система имеет решение. Поскольку нам нужно, чтобы система имела решение *при любом* значении a, единственным подходящим значением b является 3.

Второй способ. Выразим y из второго уравнения и подставим в первое; получим $(a + 3)x = a + b$. При $a \neq -3$ это уравнение имеет решение, поэтому решение имеет и система. При $a = -3$ получившееся уравнение (и исходная система) имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть равна 0, т. е. $b = -a = 3$.

Ответ: $b = 3$.

Вариант 2

Часть 1

1. *Решите неравенство* $\frac{1}{x} \geqslant -\frac{1}{6}$.

Перенесем всё в левую часть и приведем к общему знаменателю, после чего применим метод интервалов:

$$\frac{6+x}{6x} \geqslant 0;\ \ x \in (-\infty; -6] \cup (0; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup (0; +\infty)$.

2. *В городах Соколово и Масленниково, между которыми 300 км, расположены автобусные парки. В Соколово 50 автобусов, а в Масленниково 100 автобусов. Эти города соединены прямолинейной дорогой. На каком расстоянии от Соколово нужно построить заправку, чтобы сумма расстояний, которые проезжают все автобусы от своего города до заправки, была наименьшей? (Размерами городов пренебречь.)*

Мысленно образуем пары из автобусов: каждому автобусу из Соколово сопоставим автобус из Масленниково; при этом 50 автобусов из Масленниково останутся «одинокими». Понятно, что сумма расстояний, проезжаемых каждой парой, не зависит от расположения заправки и равна 300 км. Поэтому общая сумма расстояний будет наименьшей тогда, когда наименьшей будет сумма расстояний, проезжаемых одинокими автобусами из Масленниково. Следовательно, заправку нужно построить в Масленниково.

Ответ: 300 км.

3. *Одна тетрадь стоит 45 рублей. Петя купил некоторое количество таких тетрадей, но сумма покупки плохо пропечаталась в чеке, и он увидел там «7*5 руб.» (непропечатанная цифра обозначена звездочкой). Сколько тетрадей купил Петя?*

Очевидно, сумма покупки делится на 45, поэтому она делится и на 9, следовательно, ее сумма цифр делится на 9. Значит, на месте звездочки стоит цифра 6, то есть общая сумма покупки 765 рублей, а количество тетрадей равно $765 : 45 = 17$.

Ответ: 17 тетрадей.

4. *Решите уравнение* $(x-3)x + 3(x+2) = x^2 + 6$.

Преобразовав уравнение, видим, что при любом значении x получается верное равенство. Следовательно, любое x является корнем уравнения.

Ответ: x – любое число.

5. *Решите уравнение* $\sqrt{2x+8} = x$.

Возводя обе части в квадрат, получим $2x + 8 = x^2$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Проверкой убеждаемся, что x_1 – посторонний корень.

Ответ: $x = 4$.

6. *Автобус ежедневно ездит из пункта A в пункт B с одной и той же скоростью. На сколько процентов уменьшится время в пути, если эту скорость увеличить на 25%?*

Если автобус едет со скоростью v и тратит на поездку время t, значит, расстояние между A и B равно vt. После увеличения скорости новое время в пути станет равным $(vt) : (1{,}25v) = 0{,}8t$.

Ответ: на 20% .

7. *Даны функции* $y = kx + b$ $(k \geq 0)$ *и* $y = \dfrac{1}{x} - 2$. *Какими должны быть k и b, чтобы графики этих функций не имели общих точек?*

Общих точек у этих двух графиков не будет тогда и только тогда, когда график линейной функции параллелен оси абсцисс и проходит через точку $(0; -2)$.

Ответ: $k = 0$, $b = -2$.

8. *Отношение длины стороны правильного n-угольника к диаметру описанной вокруг него окружности равно* $\cos 72^\circ$. *Найдите n.*

Так как $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$, а указанное в условии отношение равно $\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, получаем: $180/n = 18$, откуда $n = 10$.

Ответ: $n = 10$.

9. *Решите уравнение* $\sqrt{16-8x+x^2} = 4 - x$.

Данное уравнение равносильно уравнению $|4 - x| = 4 - x$. Если $x \leq 4$, это уравнение превращается в тождество. Если же $x > 4$, правая часть отрицательна и уравнение решений не имеет.

Ответ: $x \leq 4$.

Часть 2

10. *У России есть три суперсекретных военных объекта: Правдино (находится в районе Северного полюса), Кривдино (в Антарктиде) и Половинка (в пустыне Сахара); связи между собой объекты не имеют. Жители Правдино всегда говорят правду, жители Кривдино всегда лгут, а каждый житель Половинки попеременно то говорит правду, то лжет. Дежурному в Москве поступил звонок с одного из объектов: «Авария!» — «На каком объекте?» — уточнил дежурный. — «В Половинке!» Куда дежурный должен направить аварийную бригаду?*

Звонок не мог поступить из Правдино, так как тогда второе высказывание звонящего было бы ложным (объекты не имеют связи между собой, и жители Правдино никак не могли узнать об аварии в Половинке, даже если бы она там и была). Если звонок поступил из Кривдино, то первое высказывание – ложь, и никакой аварии нет. Если звонок поступил из Половинки, то второе высказывание истинно, поэтому первое ложно, и никакой аварии нет.

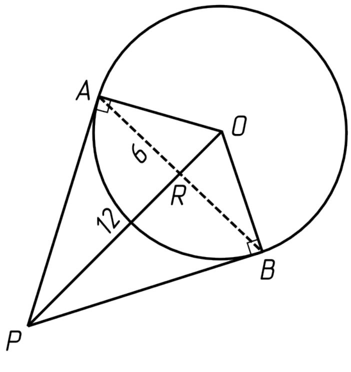
Ответ: аварийную бригаду никуда посылать не надо.

11. *Волшебники сидели за круглым столом и по очереди вырывали волоски из своих бород. Первый вырвал 1 волосок, второй 2, и так далее (каждый следующий вырывал на 1 волосок больше, чем предыдущий). Оказалось, что количество волосков, вырванных всеми волшебниками на третьем круге, на 162 меньше, чем на пятом круге. Сколько было волшебников?*

Пусть всего было n волшебников. Тогда очевидно, что каждый волшебник на следующем круге вырывал на n волосков больше, чем на предыдущем; следовательно, все волшебники на следующем круге вырывали на $n \cdot n = n^2$ волосков больше, чем на предыдущем. Поэтому на третьем круге было вырвано на $2n^2$ волосков меньше, чем на пятом. Таким образом, $2n^2 = 162$, откуда $n = 9$.

Ответ: 9.

12. *Окружность с центром O касается сторон угла APB в точках A и B; отрезки PO и AB пересекаются в точке R, при этом PR = 12, AR = 6. Найдите площадь треугольника PAO.*



Отрезки PA и PB равны как отрезки касательных, проведенных из одной точки, поэтому треугольник APB – равнобедренный. OA и OB – радиусы, поэтому точка O равноудалена от сторон угла и, следовательно, PO – биссектриса угла APB. Биссектриса PR треугольника APB является также его высотой и медианой, поэтому $AB \perp PO$, $AR = RB$. Используя тот факт, что высота AR прямоугольного треугольника PAO, проведенная к гипотенузе, равна среднему геометрическому отрезков гипотенузы, получим: $RO = 3$, $PO = 15$. Тогда $S_{PAO} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6 = 45$.

Замечание. Для нахождения RO можно было заметить, что четырехугольник $PAOB$ – вписанный, и воспользоваться теоремой об отрезках пересекающихся хорд.

Ответ: $S_{PAO} = 45$.

13. *Найдите все такие значения a, что при любых значениях b система уравнений* $\begin{cases} 2x - y = b, \\ bx + y = a. \end{cases}$ *имеет хотя бы одно решение.*

Первый способ. Перепишем систему в виде $\begin{cases} y = 2x - b, \\ y = -bx + a. \end{cases}$ Каждое ее уравнение задает на плоскости Oxy некоторую прямую. Угловой коэффициент первой прямой равен 2, а угловой коэффициент второй прямой равен $-b$. Если $b = -2$, то прямые либо параллельны, либо совпадают; система имеет хотя бы одно решение, когда они совпадают, то есть $a = -b = 2$. Если же $b \neq -2$, то прямые пересекаются, то есть система имеет решение. Поскольку нам нужно, чтобы система имела решение *при любом* значении b, единственным подходящим значением a является 2.

Второй способ. Выразим y из второго уравнения и подставим его в первое уравнение; получим $(b + 2)x = a + b$. При $b \neq -2$ это уравнение имеет решение, поэтому решение имеет и система. При $b = -2$ получившееся уравнение (и исходная система) имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть равна 0, т. е. $a = -b = 2$.

Ответ: $a = 2$.