В	С	Сумма	Балл	Подпись

Вступительный тест по математике для поступающих в 9 физико-математический класс СУНЦ УрФУ май 2014 года Вариант 1

Часть B

К каждому заданию приведите только ответ.

B1. Найдите последнюю цифру числа 3^{2014}.

Ответ. 9.
Решение. $3^{2014} = 9^{1007} = 81^{503} \cdot 9$.

B2. Решите неравенство $1 + x - 2x^2 < 0$.

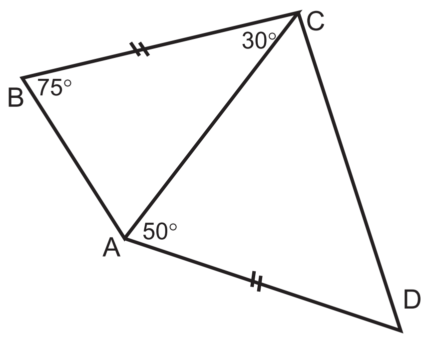
Ответ. $x < -0{,}5$, $x > 1$.
Решение. $y = 1+x-2x^2$ — квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями, направленными вниз. Значит отрицательные значения это функция принимает в точках слева от меньшего корня и справа от большего.

B3. Шариковая ручка стоит 15 рублей. Какое количество таких ручек можно купить на 400 рублей после повышения цены на 20%?

Ответ. 22
Решение. Стоимость ручки после повышения цены на 20% равна 18 рублей.

B4. Извлечь внешний корень $\sqrt{13-\sqrt{48}}$.

Ответ. $\sqrt{12} - 1$.
Решение. $\sqrt{13-\sqrt{48}} = \sqrt{1-2\sqrt{12}+12} =$
$= \sqrt{(1-\sqrt{12})^2} = |1-\sqrt{12}| = \sqrt{12} - 1$.



B5. Найдите $\angle ADC$, если $BC = AD$ (рисунок).

Ответ. $65°$.
Решение. $\angle BAC = 75°$, поэтому оба треугольника — равнобедренные.

B6. Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если известно, что площадь $ABCD$ равна 20.

Ответ. 5.

Решение. Сумма площадей треугольников ABE и DCE равна половине площади параллелограмма. В оставшемся треугольнике AED площади 10 прямые FB и FC являются средними линиями, поэтому отсекают треугольники площади которых равны четверти площади треугольника AED.

B7. Два рыбака поймали 80 рыб, причем 5/9 улова первого составляли караси, а 7/11 улова второго — окуни. Сколько рыб поймал каждый из них?

Ответ. 36 и 44.

Решение. Количество рыб, пойманных первым рабаком кратно 9, а вторым — 11. Поэтому можно записать равенство $9x + 11y = 80$, где x и y — некоторые целые неотрицательные числа. Переменная y может принимать лишь восемь заничений $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Только при $y = 4$ получаем целое x.

B8. Найдите сумму корней уравнения $\Big|\big||3 - x| + 3\big| - 1\Big| = 4$.

Ответ. 6.

Решение. Так как выражение $|3-x|+3$ всегда положительно, то $||3-x|+3| = |3 - x| + 3$. Поэтому уравнение равносильно следующему: $||3 - x| + 2| = 4$. Аналогично рассуждая, получаем уравнение $|3 - x| = 2$, которое имеет два корня: 1 и 5.

B9. Длины оснований трапеции равны 10 и 6. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции.

Ответ. 7,5.

Решение. Диагонали трапеции делятся точкой пересечения в отношении, равном отношению оснований. По теореме Фалеса в том же отношении делятся боковые стороны прямой, параллельной основаниям и проходящей через пересечение диагоналей. В нашей задаче это отношение равно $5 : 3$. Используя подобие треугольников, получаем, что искомый отрезок делится точкой перечечения пополам, а каждая из половин равна $7/4$.

B10. При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 6|x| + 9 - k^2 = 0$ имеет ровно три корня?

Ответ. $k = \pm 3$.

Решение. Заменим переменную: $t = |x|$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 - 6t + 9 - k^2 = 0$. Чтобы исходное уравнение имело три корня, у нового уравнения должен быть корень $t = 0$. Такое возможно только при $9 - k^2 = 0$. Стоит заметить, что в этом случае второй корень уравнения равен 6, а значит исходное уравнение будет иметь три корня, а не один.

Часть C

К заданиям нужно не только привести ответ, но и полностью оформить решение.

С1. Решите уравнение $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$.

Ответ. $x=1$.

Решение. Так как знаменатели дробей не могут обращаться в ноль, поэтому $x\neq-1$, $x\neq-2$.

Домножив уравнение на общий знаменатель всех дробей ($(x+1)(x+2)$) и приведя подобные, получим $2x^2+2x-4=0$. Корни этого уравнения $x=1$ и $x=-2$, но второй корень посторонний (знаменатель обращается в ноль).

С2. Упростите выражение $\dfrac{a^2-4}{\sqrt{\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)^2-4}}$ при $a<-2$.

Ответ. $-2a$.

Решение. $\dfrac{a^2-4}{\sqrt{\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)^2-4}}=\dfrac{a^2-4}{\sqrt{\frac{a^4-4a^2+4}{(2a)^2}}}=\dfrac{(a^2-4)|2a|}{\sqrt{(a^2-4)^2}}=\dfrac{(a^2-4)|2a|}{|a^2-4|}$.

При $a<-2$ модуль в числителе раскрывается со знаком $-$, а модуль в знаменателе — со знаком $+$.

С3. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон AB и BC в точках M и P соответственно, причем $MP=BP$. Найдите периметр ромба, если радиус окружности равен $\sqrt{3}$.

Ответ. 16.

Решение. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к одной окружности равны, то $BM=BP$. Учитывая условие $MP=BP$, получаем, что треугольник BMP — равносторонний, то есть острый угол ромба равен 60°.

Высота AH ромба, проведенная из вершины A к стороне BC равна двум радиусам вписанной окружности. Из прямоугольного треугольника BAH находим: $AB=AH/\cos 60^\circ=4$.

Периметр ромба равен $4AB=16$.

С4. Для наполнения бассейна имеется 3 трубы. Первой трубе для наполнения бассейна требуется времени вдвое меньше, чем второй и на 4 часа больше, чем третьей. Три трубы наполнили бы бассейн за 4 часа, но, по техническим требованиям, одновременно могут работать только две. Найдите минимальное время наполнения бассейна.

Ответ. 4,8 часа.

Решение. Пусть x — время наполения бассейна первой трубой. Тогда $2x$ — время наполнения бассейна второй трубой, $x-4$ — время напонения бассейна третьей трубой. Сразу же заметим, что $x>4$.

Так как три трубы наполнили бы бассейн за 4 часа, то

$$4(1/x+1/(2x)+1/(x-4))=1.$$

Решая это уравнение, получаем два корня: $x=2$ и $x=12$. Но по смыслу задачи ($x>4$) подходит только второй.

Чтобы бассейн наполнился за минимальное время двумя трубами, надо отключить самую медленнонаполняющую (это, конечно, вторая труба с временем наполнения бассейна 24 часа). Время наполнения бассейна двумя трубами (первой и второй) равно $1/(1/x+1/(x-4))=1/(1/12+1/8)=4,8$ часа.

B	C	Сумма	Балл	Подпись

Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 физико-математический класс СУНЦ УрФУ
май 2014 года
Вариант 2

Часть B

К каждому заданию приведите только ответ.

B1. Найдите последнюю цифру числа 7^{2014}.

Ответ. 9.

B2. Решите неравенство $3 - x - 2x^2 > 0$.

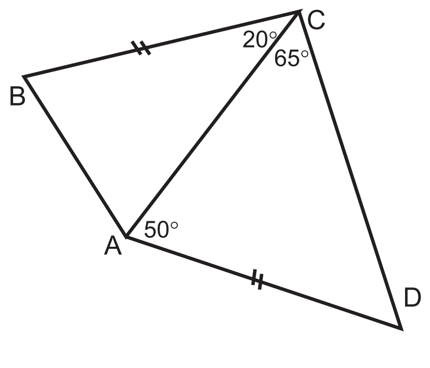
Ответ. $-1,5 < x < 1$.

B3. Стирательная резинка стоит 16 рублей. Какое количество таких стирательных резинок можно купить на 250 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ. 20.

B4. Извлечь внешний корень $\sqrt{12 - \sqrt{44}}$.

Ответ. $\sqrt{11} - 1$.



B5. Найдите $\angle BAC$, если $BC = AD$ (рисунок).

Ответ. 80°.

B6. Пусть K и L — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Площадь четырехугольника, образованного прямыми AK, KD, BL и LC равна 3. Найти площадь $ABCD$.

Ответ. 12.

B7. Две девочки посадили 78 цветов, причем 4/7 цветов, посаженных первой девочкой составляли маргаритки, а 5/19 цветов, посаженных второй девочкой — ромашки. Сколько цветов посадила каждая из них?

Ответ. 21 и 57.

B8. Найдите сумму корней уравнения $\Big|\big||x+3|+2\big|-1\Big|=7$.

Ответ. -6.

B9. Длины оснований трапеции равны 14 и 2. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции.

Ответ. $3,5$.

B10. При каких значениях параметра s уравнение $x^2-10|x|+25-s^2=0$ имеет ровно три корня?

Ответ. $s=\pm5$.

Часть C

К заданиям нужно не только привести ответ, но и полностью оформить решение.

C1. Решите уравнение $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2x-7}{x-2}=\dfrac{2x-5}{x^2-3x+2}$.

Ответ. $x=4$.

C2. Упростите выражение $\dfrac{\mathrm{c}^2-9}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{c}^2+9}{2\mathrm{c}}\right)^2-9}}$ при $0<\mathrm{c}<3$.

Ответ. $-2c$.

C3. Окружность с центром O, вписанная в ромб $KLMN$, касается сторон KL и KN в точках X и Y соответственно, причем $\angle XOY=135^\circ$. Найдите радиус окружности, если периметр ромба равен $8\sqrt{2}$.

Ответ. 1.

C4. Для наполнения плавательного бассейна водой имеются три насоса. Первому насосу для наполнения бассейна требуется времени в три раза меньше, чем второму, и на 2 ч больше, чем третьему. Три насоса, работая вместе, наполнили бы бассейн за 3ч, но по условиям эксплуатации одновременно должны работать только два насоса. Найдите минимальное время наполнения бассейна.

Ответ. $3\frac{3}{7}$ часа.