

В	С	Сумма	Балл	Подпись

Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 естественнонаучный класс СУНЦ УрФУ
май 2014 года
Вариант 1

Часть В

К каждому заданию приведите только ответ.

В1. Решите неравенство: $\frac{x+1}{x^2} > 0$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

Решение. Выражение x^2 — всегда неотрицательно и, так как стоит в знаменателе, отлично от нуля. Значит, $\frac{x+1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0$ и $x \neq 0$.

В2. Шариковая ручка стоит 15 рублей. Какое количество таких ручек можно купить на 400 рублей после повышения цены на 20%.

Ответ: 22.

Решение. Стоимость ручки после повышения равна $15 + 15 \cdot 0,2 = 18$ рублей. Заметим, что $400 = 22 \cdot 18 + 4$.

В3. Найдите последнюю цифру числа 3^{2014} .

Ответ: 9.

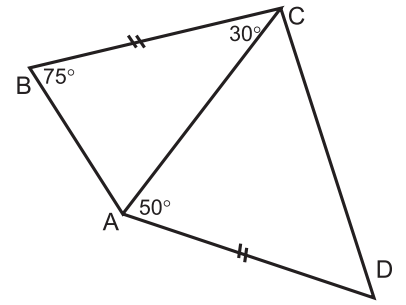
Решение. $3^{2014} = 9^{1007} = 81^{503} \cdot 9$.

В4. Упростите: $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$.

Ответ: $2\sqrt{3} - 1$.

Решение. $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{1 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 12} = \sqrt{(1 - 2\sqrt{3})^2} = |1 - 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 1$.

В5. Найдите $\angle ADC$, если $BC = AD$,
 $\angle CBA = 75^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$, $\angle CAD = 50^\circ$,
(см. рисунок).



Ответ: 65°

Решение. $\angle BAC = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$. Получили, что $BC = AC = AD$. Тогда $\triangle ACD$ — равнобедренный и $\angle ACD = \angle ADC = (180^\circ - 50^\circ)/2 = 65^\circ$.

В6. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 5x + 3 = 0$. Найдите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Ответ: $-\frac{5}{3}$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -5$ и $x_1 \cdot x_2 = 3$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{5}{3}.$$

В7. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 3$ и $BC = 6$. Точка K является пересечением биссектрисы угла ABC с прямой AD . Найдите длину отрезка BK , если известно, что BK пересекает диагональ AC в точке O и $BO = 2$.

Ответ: 3.

Решение. Прямые BC и AD параллельны, BK — секущая, тогда $\angle CBK = \angle BKA$. По условию, BK — биссектриса, значит $\angle CBK = \angle ABK$. Получаем, что $\triangle ABK$ — равнобедренный и $AB = AK = 3$. Треугольники AOK и BOC подобны и $OK : BO = AK : BC = 1 : 2$. Тогда $OK = 1$, $BK = OK + OB = 3$.

В8. Сколько точек пересечения у графиков функций $y = |x^2 - 6x + 5|$ и $y = 3$?

Ответ: 4.

Решение. $|x^2 - 6x + 5| = 3$. Значит $x^2 - 6x + 5 = 3$ или $x^2 - 6x + 5 = -3$. Каждое из уравнений имеет по два корня, значит у графиков функций всего 4 точки пересечения.

В9. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите длину высоты, проведенной к стороне BC .

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Решение. Пусть AH — искомая высота. Так как треугольник ABC тупоугольный, то AH — вне треугольника. Тогда $\triangle ANB$ прямоугольный с углом 60° . Окончательно $AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

Часть С

К заданиям нужно не только привести ответ, но и полностью оформить решение.

С1. Решите уравнение $\frac{3}{x+2} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$.

Ответ: $x = 1$.

Решение. Знаменатели дробей не могут обращаться в ноль, поэтому $x \neq -1$, $x \neq -2$.

Домножив уравнение на общий знаменатель всех дробей $(x+1)(x+2)$ и приведя подобные, получим $2x^2 + 2x - 4 = 0$. Корни этого уравнения $x = 1$ и $x = -2$, но второй корень посторонний (знаменатель обращается в ноль).

С2. В числе $\overline{42X4Y}$ найдите цифры X и Y , если известно, что это число делится на 72.

Ответ: $X = 8$, $Y = 0$ или $X = 0$ и $Y = 8$.

Решение. Число делится на 72, следовательно делится на 9 и на 8. Тогда число $\overline{X4Y}$ делится на 8, значит и на 4. Это возможно при $Y = 0$, $Y = 4$, $Y = 8$. Сумма всех цифр $10 + X + Y$ делится на 9.

Получаем:

если $Y = 0$, то $X = 8$;

если $Y = 8$, то $X = 0$;

если $Y = 4$, то $X = 4$.

Последняя пара не подходит, так как число $\overline{X4Y} = 444$ не делится на 8.

С3. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон AB и BC в точках M и P соответственно, причем $MP = BP$. Найдите периметр ромба, если радиус окружности равен $\sqrt{3}$.

Ответ: 16.

Решение. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к одной окружности равны, то $BM = BP$. Учитывая условие $MP = BP$, получаем, что треугольник BMP равносторонний, то есть острый угол ромба равен 60° .

Высота AH ромба, проведенная из вершины A к стороне BC равна двум радиусам вписанной окружности. Из прямоугольного треугольника BAH находим: $AB = AH / \cos 60^\circ = 4$.

Периметр ромба равен $4AB = 16$.

С4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + 8x + 4a = 0$ имеет единственное решение.

Ответ: $-2; 0; 2$.

Решение. При $a = 0$ уравнение обращается в линейное, решение которого $x = 0$.

При $a \neq 0$ уравнение является квадратным и имеет одно решение, если дискриминант равен нулю. $D = 64 - 16a^2 = 0$, $a^2 = 4$, $a = \pm 2$.

В	С	Сумма	Балл	Подпись

Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 естественнонаучный класс СУНЦ УрФУ
май 2014 года
Вариант 2

Часть В

К каждому заданию приведите только ответ.

В1. Решите неравенство: $\frac{x-2}{x^2} < 0$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

В2. Стирательная резинка стоит 16 рублей. Какое количество таких стирательных резинок можно купить на 250 рублей после понижения цены на 25%.

Ответ: 20.

В3. Найдите последнюю цифру числа 2^{2014} .

Ответ: 4.

В4. Упростите: $\sqrt{12 - 2\sqrt{11}}$.

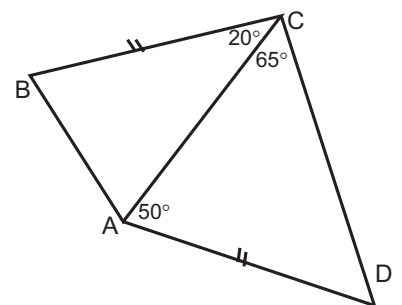
Ответ: $\sqrt{11} - 1$.

В5. Найдите $\angle BAC$, если $BC = AD$,
 $\angle DCA = 65^\circ$, $\angle BCA = 20^\circ$, $\angle CAD = 50^\circ$,
(см. рисунок).

Ответ: 80° .

В6. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения
 $x^2 - 7x + 6 = 0$. Найдите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Ответ: $\frac{7}{6}$.



В7. В параллелограмме $ABCD$ известны длины сторон: $AB=5$ и $BC=10$. Точка K является пересечением биссектрисы угла ABC с прямой AD . Найдите длину отрезка BO , если известно, что O — точка пересечения BK с диагональю AC и $BK=6$.

Ответ: 4.

В8. Сколько точек пересечения у графиков функций $y = |x^2 - 4x + 3|$ и $y = 5$?

Ответ: 2.

В9. В треугольнике ABC сторона $AB=4$, $\angle ABC=135^\circ$. Найдите длину высоты, проведенной к стороне BC .

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Часть С

К заданиям нужно не только привести ответ, но и полностью оформить решение.

С1. Решите уравнение $\frac{3}{x-1} - \frac{2x-7}{x-2} = \frac{2x-5}{x^2-3x+2}$.

Ответ: $x=4$.

С2. В числе $\overline{64X5Y}$ найдите цифры X и Y , если известно, что это число делится на 36.

Ответ: $X=1, Y=2$ или $X=6$ и $Y=6$.

С3. Окружность с центром O , вписанная в ромб $KLMN$, касается сторон KL и KN в точках X и Y соответственно, причем $\angle XOY=135^\circ$. Найдите радиус окружности, если периметр ромба равен $8\sqrt{2}$.

Ответ: 1.

С4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + 12x + 4a = 0$ имеет единственное решение.

Ответ: $-3; 0; 3$.