Вступительный тест по математике
в 10 физ-мат, мат-эк и мат-инф классы СУНЦ УрФУ
2014 год

Решения и ответы

Вариант 1

Часть B

B1. Найдите область определения функции $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-9}}$.

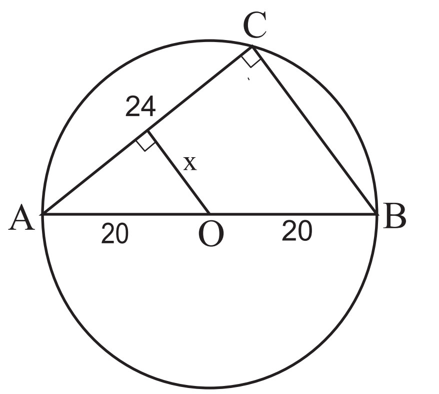
Решение: Функция определена, если $\frac{x^2+1}{x^2-9} \geqslant 0$. Заметим, что $x^2+1>0$ для любых действительных x, поэтому $x^2-9>0$. Решаем квадратное неравенство, получаем $\left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>3. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

B2. Найдите расстояние между серединами хорд AB и AC окружности радиуса 20, если длины хорд равны 40 и 24 соответственно.

Решение: Хорда AB является диаметром окружности, поэтому угол $\angle ACB = 90^\circ$. По теореме Пифагора: $BC = \sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{16 \cdot 64} = 4 \cdot 8 = 32$. Расстояние x между серединами хорд AB и AC — длина средней линии треугольника ABC, тогда $x = \frac{BC}{2} = 16$.

Ответ: 16.



B3. Ваня и Таня съедают большую банку варенья за 14 минут, а один Ваня — за 18 минут. За сколько минут съест варенье одна Таня?

Решение: Примем банку варенья за 1 и обозначим скорость поедания варенья Вани и Тани соответственно через x и y. Получаем следующие соотношения: $\begin{cases} x+y=\frac{1}{14}, \\ x=\frac{1}{18}. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе и найдем скорость Тани: $y=\frac{1}{14}-\frac{1}{18}=\frac{4}{14\cdot 18}=\frac{1}{63}$. Следовательно, одна Таня съест все варенье за 63 минуты.

Ответ: 63 минуты.

B4. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

Решение: Обозначим корни уравнения через x_0 и ${x_0}^2$ и запишем для них теорему Виета: $\begin{cases} {x_0}^2 + x_0 = \frac{15}{4}, \\ {x_0}^2 \cdot x_0 = {x_0}^3 = a^3. \end{cases}$ Откуда $x_0 = a$ и $a^2 + a = \frac{15}{4}$. Решаем квадратное уравнение, $a_1 = \frac{3}{2}$ и $a_2 = -\frac{5}{2}$ ($a_2 < 0$ не подходит). Осталось убедиться, что при $a = \frac{3}{2}$ исходное уравнение имеет решения: $D = \frac{15}{4}^2 - 4 \cdot \frac{3}{2}^3 = \frac{225}{16} - \frac{27}{2} = \frac{9}{16} > 0$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

B5. Какое наибольшее количество общих вершин могут иметь вписанные в одну и ту же окружность правильные 20-ти и 12-тиугольники?

Решение: Пусть O — центр окружности, $A_0, A_1, \ldots, A_{19}$ — вершины правильного 20-тиугольника, а $B_0, B_1, \ldots, B_{11}$ — вершины правильного 12-тиугольника. Найдем центральные углы для правильных многоугольников:
$\angle A_0OA_1 = \frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ и $\angle B_0OB_1 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.
Предположим, что вершины A_0 и B_0 совпадают, относительно них вычислим центральные углы для остальных вершин 12-ти и 20-ти угольников:
$\angle A_0OA_n = n \cdot \angle A_0OA_1 = n \cdot 18^\circ = 3n \cdot 6^\circ$ для $n = 1, \ldots, 19$,
$\angle B_0OB_m = m \cdot \angle B_0OB_1 = m \cdot 30^\circ = 5m \cdot 6^\circ$ для $m = 1, \ldots, 11$.
Если A_n и B_m совпадают, то совпадают углы $\angle A_0OA_n = \angle B_0OB_m$. Уравнение $3n = 5m$ относительно n и m имеет три решения $(5;3), (10;6), (15;9)$. Следовательно, максимальное количество общих точек равно 4.

Ответ: 4.

B6. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 12 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 30 метрам.

Решение: Поскольку расстояния, которые проползала улитка ежедневно, составляют арифметическую прогрессию, весь путь пройденный улиткой может быть найден по формуле $S = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$, где $(a_1 + a_n)$ — сумма пройденных расстояний за первый и последний день, а n — искомое количество дней. Подставляя в уравнение $a_1 + a_n = 12$ и $S = 30$, получаем $30 = 6n$.

Ответ: 5 дней.

B7. Вычислите $\left(\sqrt{8} + \sqrt{10}\right)\left(\sqrt{32(2-\sqrt{5})^2}\right)$.

Решение: $\left(\sqrt{8} + \sqrt{10}\right)\left(\sqrt{32(2-\sqrt{5})^2}\right) = \sqrt{2}\left(2+\sqrt{5}\right) \cdot 4\sqrt{2}\left|2-\sqrt{5}\right| =$
$= 8 \cdot \left(2+\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5}-2\right) = 8 \cdot (5-4) = 8.$

Ответ: 8.

B8. На сколько процентов нужно увеличить сторону равностороннего треугольника, чтобы его площадь увеличилась на 69%?

Решение: Площадь треугольника пропорциональна квадрату изменения стороны. Если сторона исходного треугольника a, а сторона получившегося увеличенного треугольника b, то $b^2 = 1,69 \cdot a^2$, откуда $b = 1,3 \cdot a$.

Ответ: на 30%.

B9. Найдите все целые решения неравенства $\frac{x^3+27}{\sqrt{1-x}} \geqslant 0$.

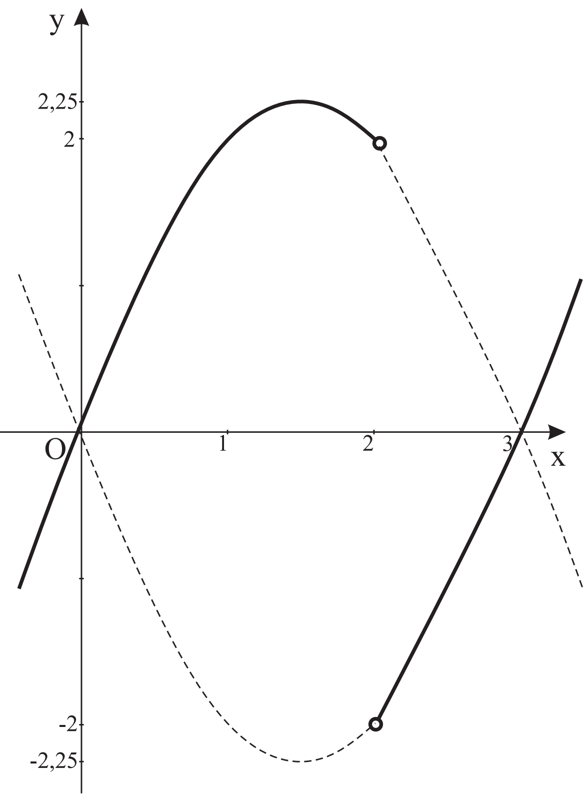
Решение: ОДЗ: $x < 1$.
Заметим, что знаменатель всегда положителен, следовательно, $x^3 + 27 \geqslant 0$. Получаем, что $-3 \leqslant x < 1$.

Ответ: $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$.

B10. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$. Угол $\angle MCH$ между медианой CM и высотой CH равен $30°$. Найдите площадь треугольника ABC, если $CM = a$.

Решение: В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна половине гипотенузы, поэтому $AB = 2a$. Из прямоугольного треугольника MCH найдем высоту $CH = a \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
$S_{ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.



Часть C

C1. Постройте график функции $y = \frac{(x^2-2x)(x-3)}{|x-2|}$ и определите при каких значениях параметра b прямая $y = b$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.

Решение: При раскрытии модуля получаем два случая:

$$y = \begin{cases} x(x-3) & , x > 2 \\ -x(x-3) & , x < 2 \end{cases}$$

Прямая $y = b$ имеет два пересечения с графиком функции $y = \frac{(x^2-2x)(x-3)}{|x-2|}$, если $b \in (-2; 2]$ или $b = \frac{9}{4}$.

Ответ: $b \in (-2; 2] \cup \{\frac{9}{4}\}$.

C2. Даны пять утверждений:
(1) $2x$ больше 31;
(2) x не больше 99;
(3) $3x$ больше 25;
(4) x не меньше 10;
(5) x больше 7.
Найдите все **натуральные** x, при которых три из этих утверждений верны, а два - нет.

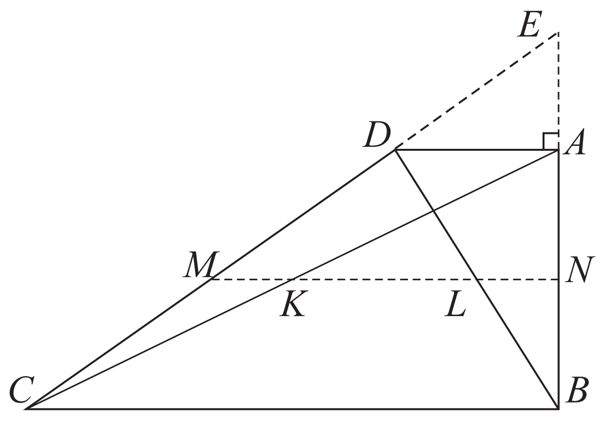
Решение: Составим таблицу решений неравенств:

x	$(-\infty; 7]$	$\left(7; \frac{25}{3}\right]$	$\left(\frac{25}{3}; 10\right)$	$\left[10; \frac{31}{2}\right]$	$\left(\frac{31}{2}; 99\right]$	$(99; +\infty)$
(1)	-	-	-	-	+	+
(2)	+	+	+	+	+	-
(3)	-	-	+	+	+	+
(4)	-	-	-	+	+	+
(5)	-	+	+	+	+	+

Три условия из пяти выполняются при $x \in \left(\frac{25}{3}; 10\right)$, единственное натуральное число на этом интервале 9.

Ответ: 9.

C3. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 7 и 25 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 60. Найдите площадь трапеции $ABCD$.



Решение: 1. Покажем, что отрезок KL, соединяющий середины диагоналей, лежит на средней линии трапеции. В самом деле, для треугольников ADC и ADB отрезки ML и KN являются средними линиями ($ML \parallel AD \parallel KN$ и проходят через середины боковых сторон трапеции). Следовательно, KL лежит на средней линии трапеции.

2. Найдем основания трапеций: $\begin{cases} \frac{AD+BC}{2} = MN = 60, \\ \frac{BC-AD}{2} = KL = 12. \end{cases}$ Получаем, $BC = 36$ и $AD = 24$.

3. Обозначим через E точку пересечения боковых сторон трапеции. Треугольники BCE и ADE подобны, с коэффициентом подобия $\frac{3}{2}$. Из подобия получаем, что $AE = 14$ и $DE = 50$.

4. Осталось вычислить площадь трапеции. Заметим, что в треугольнике ABD выполняется $DE^2 = AD^2 + AE^2$, следовательно, $\angle EAD = 90^\circ$. Таким образом: $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = 60 \cdot 7 = 420$.

Ответ: 420.

Вариант 2

Часть B

B1. Найдите область определения функции $\sqrt{\frac{x^2+1}{16-x^2}}$.

Ответ: $x \in (-4; 4)$.

B2. Найдите расстояние между серединами хорд AB и AC окружности радиуса 17, если длины хорд равны 34 и 16 соответственно.

Ответ: 15.

B3. Коля и Оля съедают большую банку варенья за 12 минут, а одна Оля — за 21 минуту. За сколько минут съест варенье один Коля?

Ответ: 28 минут.

B4. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x - a^3 = 0$ является квадратом другого?

Ответ: $\frac{5}{2}$.

B5. Какое наибольшее количество общих вершин могут иметь вписанные в одну и ту же окружность правильные 10-ти и 15-тиугольники?

Ответ: 5.

B6. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 14 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 35 метрам.

Ответ: 5 дней.

B7. Вычислите $(\sqrt{10} - \sqrt{5})\left(\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{2})^2}}\right)$.

Ответ: 10.

B8. На сколько процентов нужно уменьшить сторону равностороннего треугольника, чтобы его площадь уменьшилась на 19%?

Ответ: на 10%.

B9. Найдите все целые решения неравенства $\frac{x^3+8}{\sqrt{3-x}} \geqslant 0$.

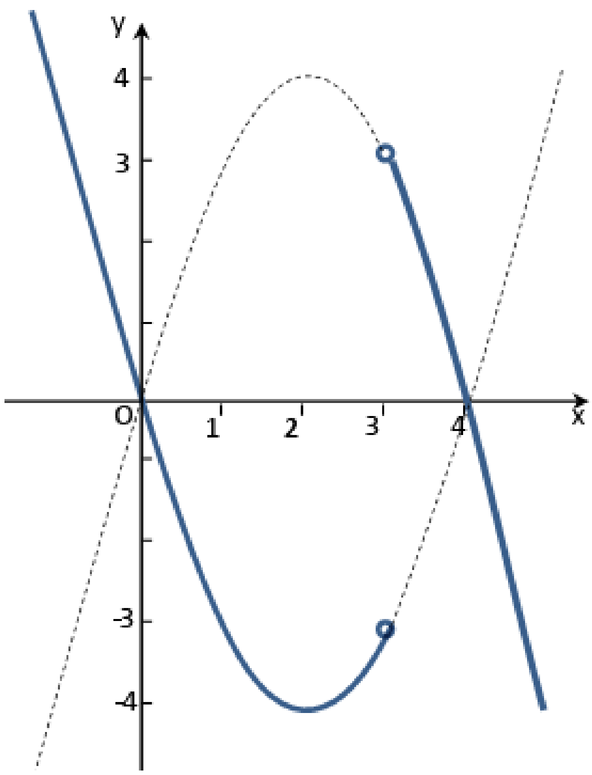
Ответ: $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

B10. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$. Угол MCH между медианой CM и высотой CH равен $45°$. Найдите площадь треугольника ABC, если $CM = m$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}m^2$.

Часть C

C1. Постройте график функции $y = \frac{(3x-x^2)(x-4)}{|x-3|}$ и определите при каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.



Ответ: $a \in \{-4\} \cup [-3; 3)$.

C2. Даны пять утверждений:
(1) $2x$ больше 31;
(2) x не больше 100;
(3) $3x$ больше 25;
(4) x не меньше 10;

(5) x больше 7.
Найдите все **натуральные** x, при которых два из этих утверждений верны, а три - нет.

Ответ: 8.

С3. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 16 и 34 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 15, средняя линия трапеции равна 30. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 480.