V Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2009

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Найти все пары целых чисел (x, y) такие, что $x^2 - 2009y + 2y^2 = 0$.
2. Найти все действительные значения a такие, что существует функция $f: R \to R$, удовлетворяющая неравенству $x + af(y) \leq y + f(f(x))$ для всех $x, y \in R$.
3. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ имеет площадь S. Докажите, что

$$AC(BD + BF - DF) + CE(BD + DF - BF) + AE(BF + DF - BD) \geq 2\sqrt{3}S.$$

Второй день

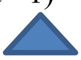
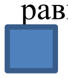
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. На плоскости задана декартова система координат. Даны точки A_1, A_2, A_3, A_4 на параболе $y = x^2$, а также точки B_1, B_2, B_3, B_4 на параболе $y = 2009x^2$. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности, кроме того абсциссы точек A_i и B_i равны для всех $i = 1,2,3,4$. Докажите, что точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на одной окружности.
5. Дан четырехугольник $ABCD$ с $\angle B = \angle D = 90°$. Точка M выбрана на отрезке AB так, что $AD = AM$. Лучи DM и CB пересекаются в точке N. Точки H и K являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямые AC и AN соответственно. Докажите, что $\angle MHN = \angle MCK$.
6. В квадратной таблице 17×17 в черный цвет покрашены n клеток, остальные клетки белые. Будем называть *линией* любую строку, столбец, а также любую из двух диагоналей таблицы. На очередном шаге разрешается сделать следующее: если хотя бы 6 квадратов в некоторой линии черные, то можно все квадраты этой линии покрасить в черный цвет. Найдите наименьшее возможное значение n такое, что для некоторого начального расположения n черных клеток удается покрасить все клетки таблицы в черный цвет за некоторое число шагов.

VI Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2010

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Найти все пары простых чисел (p, q) такие, что $p^3 - q^7 = p - q$.
2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ с $AB = AD$ точки N, M отмечены на сторонах BC и CD соответственно таким образом, что $MN = BM + DN$. Прямые AM и AN пересекают описанную окружность четырехугольника $ABCD$ вторично в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника APQ лежит на отрезке MN.
3. Прямоугольник, образованный линиями клетчатой бумаги (длина стороны каждой клетки равна 1) разбит на фигуры трех типов: равнобедренные прямоугольные треугольники  с основанием длины 2, квадраты  со стороной длины 1, ромбы  со стороной длины 1 и высотой длины 1. Фигуры могут быть ориентированы как угодно, но вершины каждой фигуры совпадают с точками пересечения линий бумаги. Докажите, что количество фигур третьего типа четное.

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Положительные числа $1,2,\dots,n$ выписаны на доске ($n > 2$). Каждую минуту два числа стираются, а вместо них записывается их наименьший общий простой делитель. Оказалось, что в конце осталось число 97. Найдите наименьшее значение n, при котором это возможно.

5. В каждой из вершин правильного -угольника лежит ровно одна фишка. На каждом шаге можно поменять местами любые две соседние фишки. Найдите наименьшее число шагов, необходимых для достижения ситуации, когда каждая из фишек оказывается сдвинутой на $\left[\frac{n}{2}\right]$ позиций против часовой стрелки от своей начальной позиции.

6. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Пусть O, I, H – центр описанной окружности, центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника ABC соответственно. Докажите, что

а) $\angle OIH > 90°$;

б) $\angle OIH > 135°$.

VII Международная Жаутыковская олимпиада по математике

Алматы, 2011

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Дана трапеция $ABCD$, M и N – середины оснований AD и BC соответственно. Докажите, что трапеция равнобедренная, если известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на отрезке MN. Остается ли верным утверждение, если известно только, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на прямой MN.

2. Найти все функции $f: R \to R$, удовлетворяющие тождеству

$$f\big(x + f(y)\big) = f\big(x - f(y)\big) + 4xf(y)$$

для любых $x, y \in R$.

3. Упорядоченную пару натуральных чисел $(a, b) \in N \times N$ будем называть *интересной*, если для любого $n \in N$ найдется $k \in N$ такое, что число $a^k + b$ делится на 2^n. Найдите все интересные пары чисел.

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Найти наибольшее количество множеств, которые одновременно удовлетворяют следующим трем условиям:

i) каждое множество четырехэлементное;

ii) каждые два различных множества имеют в точности 2 общих элемента;

iii) никакие 2 элемента не являются общими для всех множеств сразу.

5. Пусть n – целое число, $n > 1$. Элемент a множества $M = \{1,2,\dots,n^2 - 1\}$ называется *хорошим*, если существует некоторый элемент b множества M такой, что $ab - b$ делится на n^2. Кроме того, элемент a называется *очень хорошим*, если $a^2 - a$ делится на n^2. Пусть g – количество хороших элементов в M, а v – количество очень хороших элементов в M. Докажите, что $v^2 + v \le g \le n^2 - n$.

6. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K; M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников ADM и BCM пересекаются в точках M и L. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности (никакие две из этих точек не совпадают).

VIII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2012

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Дан остроугольный треугольник ABC, пусть D – произвольная внутренняя точка отрезка AB. Пусть M и N – основания перпендикуляров, опущенных из точки D на BC и AC соответственно, H_1 и H_2 – ортоцентры треугольников MNC и MND соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника AH_1BH_2 не зависит от положения точки D на AB.

2. Множество (единичных) квадратов таблицы $n \times n$ называется *удобным*, если каждая строка и каждый столбец содержит по крайней мере два квадрата, принадлежащих этому множеству. Для каждого $n \geq 5$ определите наибольшее m, для которого существует удобное множество из m квадратов, которое перестает быть удобным при удалении любого из квадратов из множества.

3. Многочлены P, Q, R с действительными коэффициентами такие, что $P\big(Q(x)\big) + P\big(R(x)\big) = const$. Докажите, что $P(x) = const$ или $Q(x) + R(x) = const$.

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Существуют ли такие целые m, n и функция $f: R \to R$, что выполняются одновременно следующие два условия:

i) $f\big(f(x)\big) = 2f(x) - x - 2$ для всякого $x \in R$;

ii) $m \leq n$ и $f(m) = n$?

5. Равносторонние треугольники ACB' и BDC' построены на диагоналях выпуклого четырехугольника $ABCD$ так, что точки B и B' лежат по одну сторону от AC, а точки C и C' лежат по одну сторону от BD. Найдите $\angle BAD + \angle CDA$, если $B'C' = AB + CD$.

6. Решите в целых числах уравнение $2x^2 - y^{14} = 1$.

IX Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2013

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Дана трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, в которой $\angle ABC > 90^\circ$. На боковой стороне AB отмечена точка M. Обозначим через O_1 и O_2 центры описанных около треугольников MAD и MBC окружностей соответственно. Известно, что описанные около треугольников MO_1D и MO_2C окружности вторично пересекаются в точке N. Докажите, что прямая O_1O_2 проходит через точку N.

2. Найдите все нечетные натуральные $n > 1$ такие, что существует перестановка $a_1, a_2, ..., a_n$ чисел $1, 2, ..., n$, в которой при всех $k, 1 \leq k \leq n$, одно из чисел $a_k^2 - a_{k+1} - 1$ и $a_k^2 - a_{k+1} + 1$ делится на n (здесь мы считаем $a_{n+1} = a_1$).

3. Пусть $a, b, c, d > 0, abcd = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} + \frac{(b-1)(d+1)}{1+cd+d} + \frac{(c-1)(a+1)}{1+da+a} + \frac{(d-1)(b+1)}{1+ab+b} \geq 0.$$

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Дан квадратный трехчлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого уравнение $p(x)=\frac{1}{n}$ не имеет рациональных корней.

5. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB||DE$, $BC||EF$, $CD||FA$. Расстояние между прямыми AB и DE равно расстоянию между прямыми BC и EF и расстоянию между прямыми CD и FA. Докажите, что сумма $AD+BE+CF$ не превосходит периметра шестиугольника $ABCDEF$.

6. Таблица 10×10 разбита на 100 единичных квадратиков. Назовем *блоком* любой квадрат 2×2, состоящий из четырех единичных квадратиков этой таблицы. Множество C, состоящее из n блоков, покрывает таблицу (т.е. каждый единичный квадратик таблицы накрыт некоторым блоком из C), но никакие $n-1$ блоков из C эту таблицу не покрывают. Найдите наибольшее возможное значение n.

X Международная Жаутыковская олимпиада по математике

Алматы, 2014

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC лежат точки M, N, K соответственно, не совпадающие с вершинами. Треугольник MNK назовём *красивым*, если $\angle BAC=\angle KMN$ и $\angle ABC=\angle KNM$. Докажите, что если в треугольнике ABC существуют два красивых треугольника с общей вершиной, то треугольник ABC – прямоугольный.

2. Существует ли функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) для каждого вещественного y существует вещественное x такое, что $f(x)=y$, и

(ii) $f(f(x))=(x-1)f(x)+2$ при всех вещественных x?

3. Даны сто различных натуральных чисел. Назовем пару чисел *хорошей*, если числа в ней отличаются в 2 или в 3 раза. Какое наибольшее число хороших пар могут образовывать эти сто чисел? (Одно и то же число может входить в несколько пар.)

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P\left(1+\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}$ и $P\left(3+\sqrt{5}\right)=3+\sqrt{5}$?

5. Пусть $U = \{1, 2, ..., 2014\}$. Для натуральных a, b, c обозначим через $f(a,b,c)$ количество упорядоченных наборов множеств $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$ и $|X_1| = a$;

(ii) $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq U \setminus Y_1$ и $|X_2| = b$;

(iii) $Y_3 \subseteq X_3 \subseteq U \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ и $|X_3| = c$.

Докажите, что $f(a,b,c)$ не меняется при перестановке a, b и c. (Здесь $|A|$ обозначает количество элементов множества A.)

6. Выпуклый четырёхугольник поделен на девять четырехугольников четырьмя отрезками, точки пересечения которых лежат на диагоналях исходного четырехугольника (см. рисунок). Известно, что в четырехугольники 1, 2, 3, 4 можно вписать окружности. Докажите, что в четырехугольник 5 также можно вписать окружность.