Квадратный трехчлен

Определение. Функция $y(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ называется квадратичной функцией или квадратным трехчленом. Область определения квадратичной функции $D(y)$ – множество всех действительных чисел R.

Выделяя полный квадрат в выражении $ax^2 + bx + c$, получаем

$$y(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Графиком квадратичной функции является парабола. Старший коэффициент a определяет направление ветвей параболы: при $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ – вниз.

Прямая $x = x_0$ ($x_0 = -\frac{b}{2a}$) является осью симметрии параболы. Вершина параболы имеет координаты (x_0, y_0), где $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена и определяет количество точек пересечения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ с осью абсцисс.

Если $D > 0$, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках с абсциссами x_1 и x_2, вычисляемых по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то парабола касается оси абсцисс в единственной точке $(x_0, 0)$ – вершине параболы.

Если $D < 0$, то парабола не имеет общих точек с осью абсцисс и в случае $a > 0$ расположена целиком выше оси абсцисс, в случае $a < 0$ – целиком ниже оси абсцисс.

Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; \mathrm{c})$.

Если $a > 0$, то число $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ является наименьшим значением квадратной функции, а $x_0 = -b/2a$ – единственной точкой минимума.

Если $a < 0$, то $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ является наибольшим значением квадратичной функции, а $x_0 = -b/2a$ – единственной точкой максимума.

Квадратное уравнение

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(*)$ при $a \neq 0$ называется квадратным уравнением.

Квадратное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$.

При $D > 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных корни $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

При $D = 0$ уравнение $(*)$ имеет единственный корень (или два совпадающих корня) $x_0 = -b/2a$.

При $D < 0$ уравнение $(*)$ действительных корней не имеет.

Теорема Виета. Пусть дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ является неотрицателен. Числа x_1, x_2 — – корни уравнения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

В случае $a = 1$ квадратное уравнение принимает вид $x^2 + px + q = 0$ и называется приведенным.

Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, то его правая часть раскладывается на линейные множители: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

В случае, когда $D = 0$, имеем $y = a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -b/2a$

Расположение корней квадратного трехчлена

Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $y(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда:

1. $x_1 < d < x_2 \Longleftrightarrow a \cdot y(d) < 0$.

2. $x_1 < d$ и $x_2 < d \Longleftrightarrow \begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_0 < d, \\ ay(d) > 0. \end{cases}$

3. $x_1 > d$ и $x_2 > d \Longleftrightarrow \begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_0 > d, \\ ay(d) > 0. \end{cases}$

Следствия:

1) $x_1 \in (d_1, d_2)$ и $x_2 \in (d_1, d_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_0 \in (d_1, d_2) \\ ay(d_1) > 0, \\ ay(d_2) > 0. \end{cases}$

2) $x_1 < d_1 < d_2 < x_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} ay(d_1) < 0, \\ ay(d_2) < 0. \end{cases}$

Примеры.

1. Найти наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 2ax + 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

   Рассмотрим три случая расположения абсциссы вершины параболы x_0 по отношению к отрезку $[-1; 1]$:

   (a) $x_0 \in [-1; 1]$. В этом случае наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 2ax + 1$ на отрезке $[-1; 1]$ будет в точке x_0.
   Найдем значение $x_0 = -\frac{-2a}{2 \cdot 2} = \frac{a}{2}$.
   $\frac{a}{2} \in [-1; 1] \Longleftrightarrow a \in [-2; 2]$ При этом наименьшее значение $y = y(\frac{a}{2}) = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a\left(\frac{a}{2}\right) + 1 = 1 - \frac{a^2}{2}$.

   (b) $x_0 < -1$. В этом случае наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 2ax + 1$ на отрезке $[-1; 1]$ будет в точке -1.
   Т.е. при $a < -2$ наименьшее значение $y = y(-1) = 2a + 3$.

   (c) $x_0 > 1$. В этом случае наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 2ax + 1$ на отрезке $[-1; 1]$ будет в точке 1.
   Т.е. при $a > 2$ наименьшее значение $y = y(1) = 3 - 2a$.

   Ответ: при $-2 \leqslant a \leqslant 2$ наим. $y = 1 - \frac{a^2}{2}$;
   при $a < -2$ наим. $y = 2a + 3$;
   при $a > 2$ наим. $y = 3 - 2a$.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$ имеет единственный корень.

   Данное уравнение будет иметь единственный корень в случае, когда оно линейное, т.е. когда $a = 0$, и в случае, когда $D = 0$.
   Находим дискриминант $D = (a+1)^2 - 4a(2a-1) = a^2 + 2a + 1 - 8a^2 + 4a = -7a^2 + 6a + 1$.
   Решая уравнение $-7a^2 + 6a + 1 = 0$, получаем $a = -\frac{1}{7}$ или $a = 1$.
   Ответ: $a \in \{-\frac{1}{7},\ 0,\ 1\}$.

3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ имеет два различных корня. Определить знаки этих корней в зависимости от a.

Найдем дискриминант $D = 4(a-1)^2 - 4(2a+1) = 4a^2 - 16a$.
Чтобы уравнение имело 2 различных корня, дискриминант должен быть больше 0.
$D > 0 \iff a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.
Запишем теорему Виета для корней этого уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a - 2, \\ x_1 \cdot x_2 = 2a + 1 \end{cases}$$

Числа $a = -1/2$ и $a = 1$ разбивают множество $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ на следующие промежутки:

(a) $a \in (-\infty; -1/2)$. В этом случае $x_1 \cdot x_2 < 0$, значит, корни x_1 и x_2 имеют разные знаки.

(b) $a = -1/2$. В этом случае $x_1 \cdot x_2 = 0$, $x_1 + x_2 < 0$, значит, $x_1 < 0$, а $x_2 = 0$.

(c) $a \in (-1/2; 0)$. В этом случае $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$, значит, $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$.

(d) $a \in (4; +\infty)$. В этом случае $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$, значит, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1/2)$ $x_1 < 0$, $x_2 > 0$;
при $a = -1/2$ $x_1 < 0$, $x_2 = 0$;
при $a \in (-1/2; 0)$ $x_1 < 0$ $x_2 < 0$;
при $a \in (4; +\infty)$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.