СУНЦ УрФУ, 2020 год
Решения вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 естественнонаучный класс

Часть 1

1. *(1 балл)* Три дюжины лимонов стоят столько рублей, сколько можно купить лимонов на 16 рублей. Сколько стоит дюжина лимонов? (Одна дюжина составляет 12 штук.)

Решение. Пусть x руб. стоит один лимон, тогда $36x$ руб. стоят три дюжины лимонов, $\frac{16}{x}$ штук лимонов можно купить на 16 рублей. По условию $36x = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{36}$, т.е. $x = \frac{2}{3}$ (руб.) стоит один лимон. Тогда дюжина лимонов стоит $(2/3) \cdot 12 = 8$ рублей.

Ответ: 8.

2. *(2 балла)* Вместо букв a и b поставьте цифры в шестизначном числе $a1832b$ так, чтобы получилось число, кратное 15. Рассмотрите все возможные случаи. В ответе укажите **наибольшее** из всех полученных чисел.

Решение. Число кратно 15 тогда и только тогда, когда оно кратно 3 и 5 одновременно. Число кратно 3, если сумма его цифр кратна 3. Число кратно 5, если оно оканчивается на 0 или на 5. Значит, $b = 0$ или $b = 5$. Если $b = 0$, то сумма известных цифр числа будет равна $1+8+3+2 = 14$, поэтому а $\in \{1; 4; 7\}$. Если $b = 5$, то сумма известных цифр числа будет равна $1+8+3+2+5 = 19$, поэтому а $\in \{2; 5; 8\}$. Таким образом, наибольшее число будет равно 818325.

Ответ: 818325.

3. *(2 балла)* Вычислить $\frac{(\sqrt{75}+\sqrt{50})(5-2\sqrt{6})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Решение. $\frac{(\sqrt{75}+\sqrt{50})(5-2\sqrt{6})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3-2\sqrt{6}+2)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 5\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = 5.$

Ответ: 5.

4. *(1 балл)* При каком значении параметра a график функции $y = |x-3| + a$ пересекает ось Ox в точке, абсцисса которой равна -1?

Решение. Точка пересечения графика с осью абсцисс имеет координаты $(-1, 0)$. Подставляя координаты этой точки вместо x и y в формулу, которой задана функция, находим, что $a = -4$.

Ответ: -4.

5. *(3 балла)* При каких значениях параметра a сумма корней уравнения

$$4x^2 + (2-a-a^2)x + a^2 - 3 = 0$$

равна нулю? Если таких значений больше одного, то в ответе укажите сумму всех возможных значений a.

Решение. Запишем уравнение в приведенном виде: $x^2 + \frac{1}{4}(2-a-a^2)x + \frac{1}{4}(a^2-3) = 0$. Согласно теореме Виета, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком (при условии, что эти корни существуют):

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{4}(2-a-a^2),$$

значит, $2 - a - a^2 = 0$. Получаем $a_1 = 1$; $a_2 = -2$. Проверим, имеет ли уравнение корни при найденных значениях параметра a. При $a = 1$ получаем уравнение $4x^2 - 2 = 0$, имеющее два корня. Значит, $a = 1$ подходит. При $a = -2$ получаем уравнение $4x^2 + 1 = 0$, которое корней не имеет. Значит, $a = -2$ не подходит.

Ответ: 1.

6. *(2 балла)* Хорды AB и CD данной окружности пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 8$, $BD = 10$, $CM = 5$, $DM = 6$. Найти AM.

Решение. Заметим, что $\triangle ACM \sim \triangle MBD$ по двум углам ($\angle ACM = \angle MBD$, так как вписанные и опираются на одну дугу AD, $\angle AMC = \angle BMD$ как вертикальные). Из подобия получаем: $\frac{AM}{MD} = \frac{AC}{BD}$; $\frac{AM}{6} = \frac{8}{10}$; $AM = 4,8$.

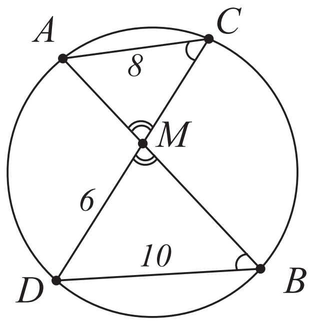

Рисунок к задаче 6

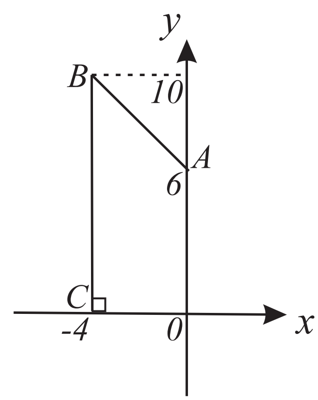

Рисунок к задаче 9

Ответ: $4,8$.

7. *(2 балла)* В баскетбольном турнире участвует несколько команд. На первом этапе турнира каждая команда с каждой играет по одной игре. Сколько команд участвует в турнире, если на первом этапе сыграно 55 игр?

Решение. Пусть всего n команд. Так как каждая команда сыграет с каждой по одной игре, значит, каждая команда сыграет $n-1$ игру. Поскольку в каждой игре участвует две команды, произведение $n(n-1)$ учитывает каждую игру дважды. Поэтому всего всего на первом этапе будет $\frac{n(n-1)}{2}$ игр. По условию всего сыграно 55 игр, получаем уравнение $\frac{n(n-1)}{2} = 55$, откуда $n = 11$.
Ответ: 11.

8. *(2 балла)* Решить уравнение: $5x^2 - (10 + \sqrt{7})x + 2\sqrt{7} = 0$. Если корней больше одного, то в ответе укажите больший из них.

Решение. Найдем дискриминант: $D = (10 + \sqrt{7})^2 - 40\sqrt{7} = (10 - \sqrt{7})^2$, тогда $x_1 = \frac{\sqrt{7}}{5}$; $x_2 = 2$. Так как $\frac{\sqrt{7}}{5} < 2$, то в ответ записываем число 2.
Ответ: 2.

9. *(3 балла)* Вычислить площадь трапеции, ограниченной осями координат, прямой $x = -4$ и прямой, которая проходит через точку $(-1, 7)$ и параллельна прямой $y = 3 - x$.

Решение. Напишем уравнение прямой, о которой говорится в задаче в общем виде: $y = kx + b$. Так как искомая прямая параллельна прямой $y = 3 - x$, то ее угловой коэффициент равен угловому коэффициенту данной прямой, то есть $k = -1$. Искомая прямая проходит через точку $(-1; 7)$, поэтому $b = 6$, получаем уравнение: $y = 6 - x$.

На координатной плоскости построим прямые $x = -4$ и $y = 6 - x$, которые вместе с осями координат образуют прямоугольную трапецию $OABC$, о которой и говорится в задаче.
$S_{OABC} = \frac{OA+BC}{2} \cdot OC = \frac{6+10}{2} \cdot 4 = 32$.
Ответ: 32.

10. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC медиана CM равна 6 и делит прямой угол C в отношении $1 : 2$. Найти площадь треугольника ABC. **В ответе** запишите $\sqrt{3} \cdot S_{ABC}$.

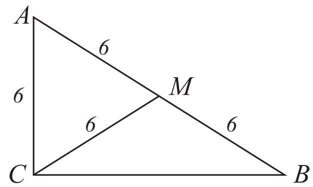

Рисунок к задаче 10

Решение. 1) Введем обозначения для углов, на которые медиана треугольника делит прямой угол: $\angle ACM = \beta$, $\angle MCB = \alpha$. По условию $\alpha : \beta = 1 : 2$, если $\alpha = x$, то $\beta = 2x$ и $x + 2x = 90^\circ$, откуда $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
2) Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы, то $AM = MC = MB = 6$. Значит, $\triangle ACM$ – равнобедренный, причем $\angle A = \angle ACM = 60^\circ$. Тогда все углы в этом треугольнике равны 60°, поэтому он равносторонний и каждая сторона в нем равна 6.
3) Рассмотрим $\triangle ACB$: $\sin\beta = \frac{CB}{AB}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CB}{12}$; $CB = 6\sqrt{3}$.
4) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$. Значит, $S\cdot\sqrt{3} = 18\cdot 3 = 54$.
Ответ: 54.

Часть 2

11. *(6 баллов)* Решить уравнение: $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$.
Решение. Перенесем все слагаемые, содержащие переменную, в правую часть уравнения и приведем их к общему знаменателю: $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12} \Leftrightarrow -1 = \frac{2}{x-2} - \frac{6-x}{3(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$

$$-1 = \frac{7x+6}{3(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ 7x+6 = -3x^2+12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2/3; \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = -3$.

12. *(6 баллов)* Найти все значения x, при которых существует функция $y = \frac{(\sqrt{4x+x^2})^2}{x}$ и построить ее график. С помощью графика определить, какие значения может принимать эта функция.

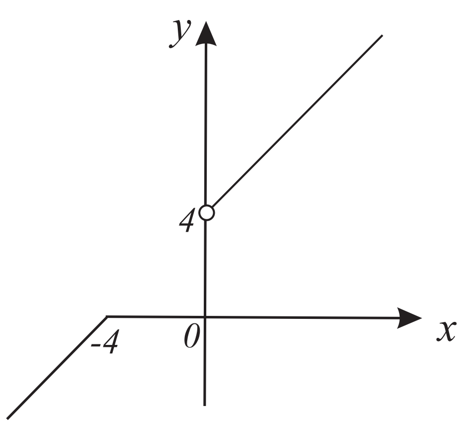

Рисунок к задаче 12

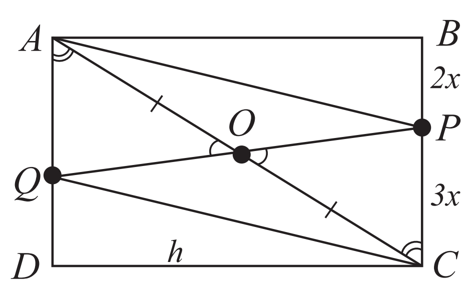

Рисунок к задаче 14

Решение. Область определения функции $y = \frac{(\sqrt{4x+x^2})^2}{x}$ задается системой:
$\begin{cases} 4x + x^2 \geqslant 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty), \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty).$
На области определения функция совпадает с $y = x + 4$ (см. рисунок). Множеством значений функции является $E_y = (-\infty; 0] \cup (4; +\infty)$.
Ответ: $D_y = (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$; $E_y = (-\infty; 0] \cup (4; +\infty)$.

13. *(6 баллов)* Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количество этих металлов находится в отношении $2:3$, а в другом – в отношении $3:7$. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении $5:11$?

Решение. 1) Найдем массу золота и серебра в новом сплаве. Золото: $\frac{5}{16}\cdot 8=\frac{5}{2}$ кг, серебро: $\frac{11}{16}\cdot 8=\frac{11}{2}$ кг.
2) Пусть x кг – масса 1-ого сплава, y кг – масса 2-го сплава, тогда масса золота в этих сплавах: $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y$ кг; масса серебра: $\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y$ кг. Получаем систему уравнений: $\begin{cases}\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y=\frac{5}{2},\\ \frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y=\frac{11}{2}.\end{cases}$ Домножим первое уравнение на 3, второе – на 2 и вычтем полученные равенства. Получим $\frac{5}{10}y=\frac{7}{2}$, значит, $y=7$. Тогда из первого уравнения находим, что $x=1$.

Ответ: нужно взять 1 кг первого сплава и 7 кг второго сплава.

14. *(6 баллов)* В прямоугольнике $ABCD$ через середину диагонали AC проведена прямая, которая пересекает сторону BC в точке P, а сторону AD в точке Q. При этом $BP:PC=2:3$. Определить вид четырехугольника $APCQ$ и найти его площадь, если площадь прямоугольника равна 20.

Решение. Пусть точка O – середина AC. По условию $\frac{BP}{PC}=\frac{2}{3}$, тогда $BP=2x$, $PC=3x$, $AD=5x$.
1) Рассмотрим $\triangle PCO$ и $\triangle AOQ$:
а) $AO=CO$ (по условию);
б) $\angle POC=\angle AOQ$ (вертикальные);
в) $\angle PCO=\angle OAQ$ (накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC).
Значит, $\triangle PCO=\triangle AOQ$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Значит, $PO=OQ$.
2) В четырехугольнике $APCQ$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $APCQ$ – параллелограмм (по признаку). Тогда $AQ=PC=3x$.
3) Пусть $CD=h$, тогда $S_{ABCD}=AD\cdot CD=5x\cdot h=20$, следовательно $x\cdot h=4$.
4) $S_{APCQ}=AQ\cdot CD=3x\cdot h=3\cdot 4=12$.

Ответ: 12.

15. *(6 баллов)* Для каждого значения параметра a решить неравенство: $(2-a)x\leqslant a^2-4$.

Решение. Данное неравенство является линейным относительно переменной x. Его множество решений зависит от того, какое значение принимает коэффициент $2-a$, стоящий при переменной.
1) Если $2-a>0$, т.е. $a<2$, то при делении обеих частей неравенства на $2-a$ знак неравенства сохраняется, поэтому получаем $x\leqslant -a-2$.
2) Если $2-a=0$, то неравенство принимает вид: $0\cdot x\leqslant 0$, которое является верным при любых значениях переменной x.
3) Если $2-a<0$, т.е. $a>2$, то при делении обеих частей неравенства на $2-a$ знак неравенства меняется на противоположный, поэтому получаем: $x\geqslant -a-2$.

Ответ: при $a<2$, $x\in(-\infty;-a-2]$; при $a=2$, $x\in\mathbb{R}$; при $a>2$, $x\in[-a-2;+\infty)$.

Критерии оценивания Части 2

11. *(6 баллов)*
1. Все шаги решения верные, но получен неверный ответ из-за арифметической ошибки при решении квадратного уравнения – 5 баллов.
2. Получен верный ответ, но не указано и никак не упоминается ОДЗ или необходимость отбора корней – 4 балла.
3. Все шаги решения верные, решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка во время приведения дробей к общему знаменателю – 2 балла.

12. *(6 баллов)*
1. Все шаги решения верные, но не выколота точка $(0, 4)$ на графике – 5 баллов.
2. Верно построен график функции, но множество значений не найдено или найдено неверно – 4 балла.
3. Верно найдена область определения функции – 2 балла.
4. В решении построен график прямой $y = x - 4$ и получен ответ на вопрос о множестве значений для него – 2 балла.

13. *(6 баллов)*
1. Все шаги решения верные, решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка – 5 баллов.
2. Верно построена математическая модель – 2 балла.

14. *(6 баллов)*
1. Доказано, что $APCQ$ является параллелограммом – 3 балла.
2. Верно найдена площадь $APCQ$, но не доказано или не полностью обосновано, что этот четырехугольник является параллелограммом – 3 балла.
3. Все шаги решения верные, но при вычислении площади допущена арифметическая ошибка – 5 баллов.

15. *(6 баллов)*
1. Каждый верно рассмотренный случай ($a < 2$, $a = 2$ или $a > 2$) – 2 балла.
2. В рассмотренном случае ($a < 2$, $a = 2$ или $a > 2$) ответ отличается от верного исключением граничной точки – 1 балл.