

1.Траволатор (10 баллов)

Во многих аэропортах сейчас есть траволаторы – горизонтально движущиеся дорожки, на которых люди могут просто стоять вместе со своим багажом и перемещаться относительно пола вместе с траволатором, также не запрещается хождение по траволатору как в направлении его движения, так и против.

Пусть скорость движения траволатора равна U , скорость движения человека по траволатору обозначим V .

1.1.Определите скорость движения человека относительно неподвижного пола, когда он идет по траволатору в направлении его движения (0,5 баллов);

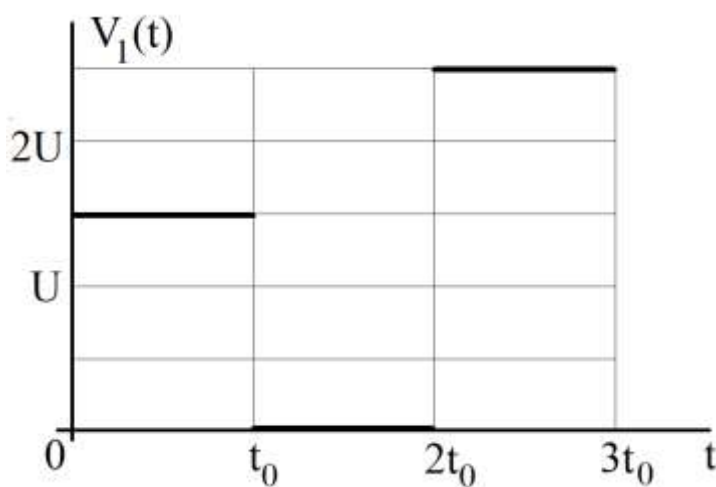
1.2.определите скорость движения человека относительно неподвижного пола, когда он движется против движения ленты траволатора (0,5 баллов).

Теперь решите следующую задачу:

Скучающий пассажир обнаружил траволатор и стал по нему кататься. В течение трех промежутков времени, длительностью t_0 каждый, он мог двигаться, как в

направлении движения ленты, так и против него, при этом скорость его движения относительно его также могла меняться.

Информация о движении скучающего пассажира содержится в графике, на которой представлена зависимость скорости его движения V_1 относительно неподвижных объектов. В момент времени $t = 0$ человек вступил на траволатор, в момент времени $3t_0$ он оказался у



конца траволатора.

Используя график, ответьте на следующие вопросы:

1.3.опишите движение человека по траволатору. Формат описания: в течение первого участка человек двигался в направлении против (по) траволатору, скорость его движения относительно пола равна (3 балла);

1.4.найдите скорость движения человека относительно траволатора на всех этапах движения (3 балла);

1.5.определите длину траволатора (3 балла).

В этой задаче Вам известны U – скорость движения траволатора и интервал времени t_0 .

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

1.1. Если человек идет по траволатору со скоростью V в направлении его движения, а траволатор, в свою очередь движется со скоростью U , то скорость движения человека относительно пола равна

$$V_1 = V + U.$$

1.2. Если человек идет по траволатору со скоростью V против направления его движения, то скорость движения человека относительно пола равна

$$V_2 = U - V.$$

Возможен ответ $V - U$ (другое направление).

1.3. Опишем движение человека, используя график, данный в условии задачи.

На первом участке скорость человека относительно неподвижных объектов равна

$$V_1 = \frac{3}{2}U.$$

Это означает, что человек движется в направлении движения ленты траволатора со скоростью $0,5U$.

На втором участке скорость движения человека относительно неподвижных объектов равна нулю. Он движется по ленте траволатора против направления ее движения со скоростью U .

На третьем участке скорость движения человека относительно неподвижных объектов равна

$$V_3 = \frac{5}{2}U.$$

На этом участке человек движется по ленте траволатора в направлении его движения со скоростью $1,5U$.

За время $3t_0$ путь, пройденный человеком относительно неподвижных объектов равен

$$L = \frac{3}{2}Ut_0 + \frac{5}{2}Ut_0 = 4Ut_0.$$

Длина ленты траволатора совпадает с путем человека относительно неподвижных объектов.

Критерий	Содержание	Балл
1.1.	$V + U$	0,5
1.2.	$U - V$ или $V - U$	0,5
1.3.	Правильно описаны все три участка (по одному баллу за каждый правильно описанный участок)	3
1.4.	Правильно найдены скорости движения человека относительно траволатора (направление, величина) на всех участках	3
1.5.	Правильно найдена длина траволатора	3

2. Заполнение сосуда (10 баллов)

2.1. Сосуд имеет объём $4V_0$ и состоит из трёх отсеков, два из которых имеют объёмы V_0 , а один - $2V_0$. Размеры сосуда $a \times 2a \times 2a$ (глубина, высота, ширина). Известно, что $a = 20$ см, $\tau_0 = 2$ с.

В верхней крышке сосуда имеется небольшое отверстие, через которое из крана с постоянной скоростью поступает вода, причем время заполнения одного отсека равно τ_0 .

Определите объём w , поступающий в сосуд в единицу времени. (0,5 баллов)

Правая стенка сосуда прозрачная, через нее можно наблюдать за тем, как меняется уровень жидкости h с течением времени. Представьте себе, что Вы наблюдаете справа (через правую прозрачную стенку) за тем, как заполняется сосуд. Постройте график зависимости уровня жидкости от времени $h(t)$ (1,5 балла).

Теперь представим себе, что в точку А мы подключили манометр и кроме уровня жидкости фиксируем еще и зависимость показаний манометра от времени. Постройте график, иллюстрирующий зависимость показаний манометра от времени (1 балл).

Известно, что $a = 20$ см, $\tau_0 = 2$ с, атмосферное давление принять равным нулю.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Объём воды, поступающий в сосуд в единицу времени, равен

$$w = \frac{V_0}{\tau_0};$$

$$w = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

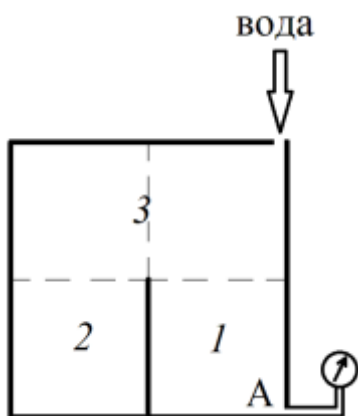
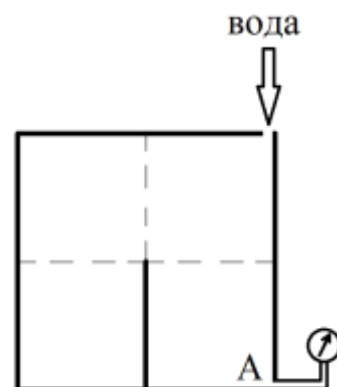
Перенумеруем отсеки. В течение времени $\tau_0 = 2$ с будет заполняться первый отсек. За время t в отсек поступит объём воды

$$V(t) = w \cdot t = \frac{V_0}{\tau_0} t.$$

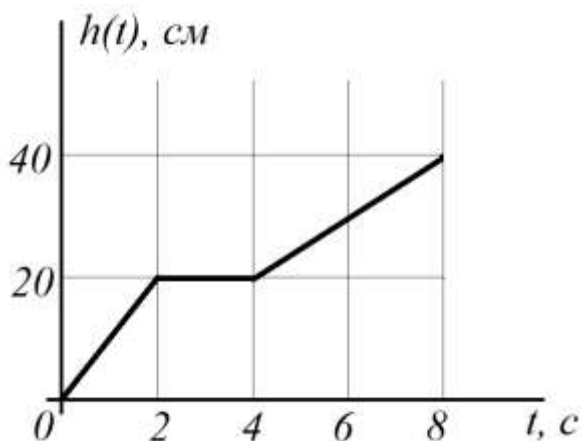
Следовательно, уровень воды будет увеличиваться по

закону

$$h(t) = \frac{V(t)}{S} = \frac{V_0}{S\tau_0} t = \frac{a^3}{a^2\tau_0} t = \frac{a}{\tau_0} t;$$
$$h(t) = 0,1 \cdot t.$$



Далее начнет заполняться второй отсек, и пока он полностью не заполнится, уровень воды меняться не будет. Время заполнения второго отсека также 2 секунды.



Спустя 4 секунды от начала заполнения начнёт заполняться третий отсек. Уровень жидкости будет меняться в два раза медленнее, так как площадь отсека в два раза больше

$$h_3(t) = \frac{V(t)}{2S} = \frac{V_0}{S2\tau_0}t = \frac{a^3}{2a^2\tau_0}t = \frac{a}{2\tau_0}t;$$

$$h_3(t) = 0,05 \cdot t.$$

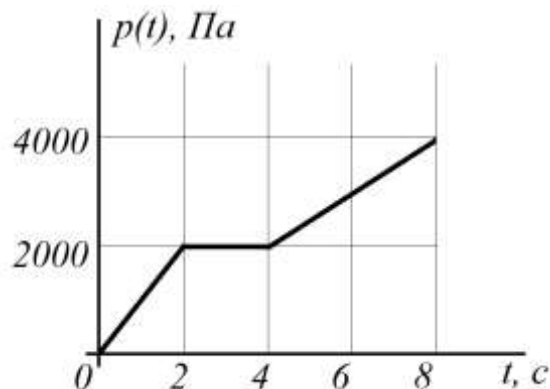
Время заполнения третьего отсека равно $2\tau_0 = 4$ с.

График зависимости уровня жидкости в сосуде от времени с точки зрения наблюдателя, расположенного справа, представлен на рисунке.

Манометр, подключенный в точке А, фиксирует давление жидкости. Для определения его показаний, следует вспомнить, что давление жидкости на глубине h определяется следующим образом

$$p(h) = \rho gh.$$

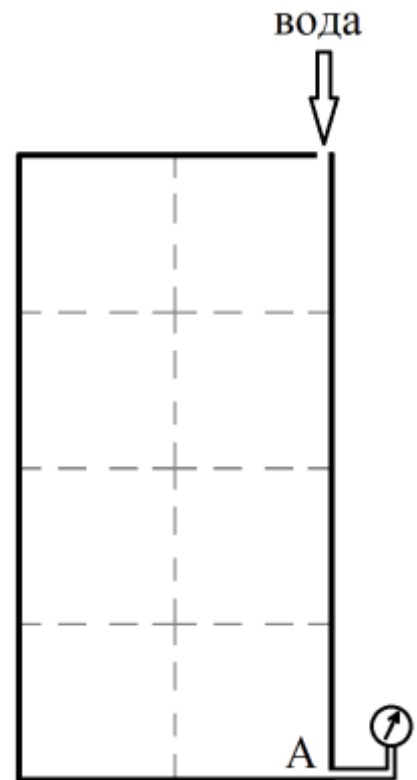
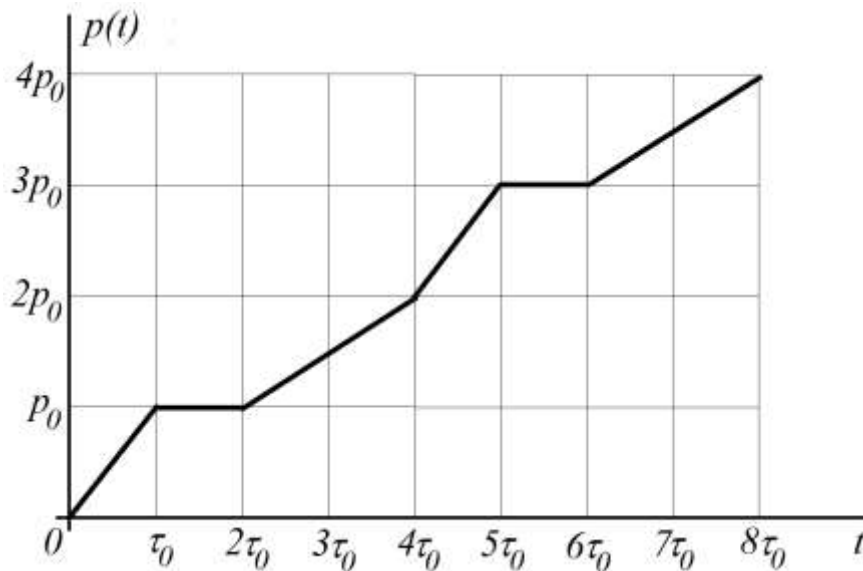
Поэтому график $h(t)$ легко «пересчитать» в график $p(t)$. Глубине 20 см будет соответствовать давление 2000 Па, а уровню воды 40 см – давление 4000 Па. График зависимости показаний манометра от времени представлен на рисунке.



Критерий	Содержание	Балл
2.1.1	Определен объем воды, поступающий в сосуд за 1 секунду (0,25 в общем виде, 0,25 – расчет)	0,5
2.1.2.	Построен график зависимости $h(t)$: На графике четко прослеживаются три участка (две линейные зависимости с правильными углами наклона, горизонталь) – 1 балл, Правильно посчитаны все точки – 0,5 баллов	1,5 (1 балл) (0,5 баллов)
2.1.3.	График зависимости $p(t)$: есть формула для гидростатического давления правильно посчитаны значения давлений правильно построен график	1 (0,25 балла) (0,5 баллов) (0,25 балла)

2.2. Пусть теперь сосуд имеет объем $8V_0$, размеры сосуда $a \times 4a \times 2a$ (глубина, высота, ширина). Известно, что $a = 20$ см, $\tau_0 = 2$ с, атмосферное давление принять равным нулю.

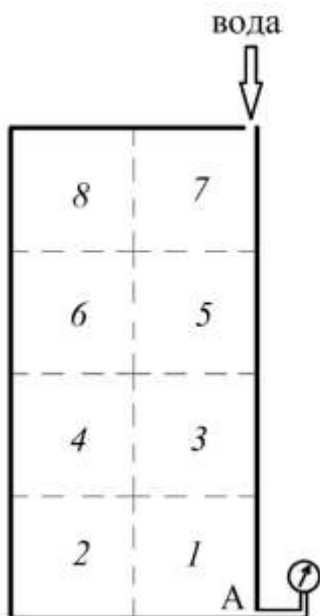
В сосуд по-прежнему через небольшое отверстие из того же крана поступает вода в таком же режиме, за



подъёмом уровня жидкости мы опять наблюдаем через правую прозрачную стенку. График зависимости показаний манометра, расположенного в точке А, времени представлен на рисунке, $p_0 = 2000$ Па.

Используя данный график, а также решение задачи 2.1,

- разберитесь, как менялась высота уровня жидкости в сосуде (3 балла),
- на предложенной схеме (находится справа от графика) нарисуйте внутреннее устройство сосуда (то есть ответьте на вопрос, как расположены отсеки, и каковы они) (4 балла).



ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

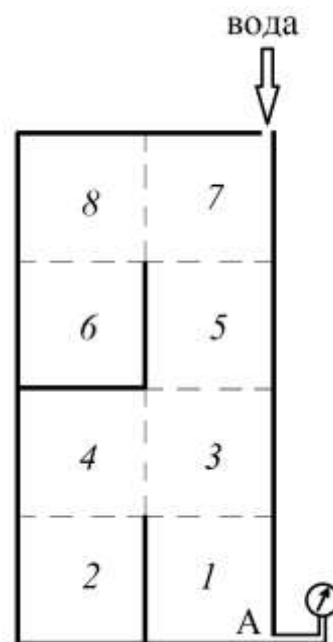
Перенумеруем отсеки – от 1 до 8. Структура нижней части сосуда такая же, как в задаче 2.1., таким образом, мы поняли, что происходит, во временном промежутке $0 \leq t \leq 4\tau_0$.

На участке от $4\tau_0 \leq t \leq 5\tau_0$ характер изменения давления такой же, как на участке $0 \leq t \leq \tau_0$, следовательно заполняется только один отсек – это отсек 5.

На участке от $5\tau_0 \leq t \leq 6\tau_0$ характер изменения давления такой же, как на участке $\tau_0 \leq t \leq 2\tau_0$, давление не меняется, следовательно, заполняется только один отсек – это отсек 6.

На участке от $6\tau_0 \leq t \leq 8\tau_0$ характер изменения давления такой же, как на участке $6\tau_0 \leq t \leq 8\tau_0$, давление не меняется, следовательно, заполняются два отсека – это отсеки 7 и 8.

Таким образом, мы видим, что структура верхней части сосуда точно такая же, как нижняя. Тогда можно изобразить внутреннюю структуру сосуда (см.рисунок справа).



Критерий	Содержание	Балл
2.2.1	Описано, как меняется высота уровня жидкости в сосуде (по 0,5 балла за каждый правильный участок, участков на графике шесть)	3 балла
2.2.2.	Нарисовано внутреннее устройство сосуда (8 отсеков – по 1 баллу за каждый уровень – пара 1 и 2 отсек, верно стоит перегородка, 4 и 3 отсеки (1 балл), наличие (отсутствие перегородки) – 1 балл; и т.д.)	4 балла

3.Шарик с полостью (5 баллов)

В шарике массы M и объема V имеется полость неизвестного объёма. Известно, что когда полость заполнена наполовину водой, то средняя плотность была равна $\rho_1 = 1300 \text{ кг/м}^3$. Когда полость полностью заполнили водой, то средняя плотность оказалась равной $\rho_2 = 1700 \text{ кг/м}^3$.

Определить:

- среднюю плотность шарика с пустой полостью ρ_0 (0,5 баллов);
- определить отношение объема полости к объёму кубика (2,5 балла);
- во сколько раз плотность материала, из которого сделан шарик ρ , больше его средней плотности ρ_0 (2 балла).

Плотность воды известна и равна $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Определим среднюю плотность пустого шарика:

$$\rho_0 = \frac{M}{V}.$$

Обозначим V_n – объём полости. Если полость заполнена водой наполовину, то средняя плотность равна

$$\rho_1 = \frac{M + \frac{1}{2}\rho_B V_n}{V}.$$

Если полость полностью заполнена водой, то средняя плотность равна

$$\rho_2 = \frac{M + \rho_B V_n}{V}.$$

Из записанных соотношений определяем объём полости

$$V_n = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_B} V.$$

После получения ответа в общем виде, подставим числовые значения и найдем ответ

$$V_n = \frac{2(1700 - 1300)}{1000} V = 0,8V.$$

Объем полости составляет 0,8 объема шарика.

Определим сейчас, во сколько раз плотность материала шарика больше его средней плотности. Объем материала составляет 0,2V (объем полости 0,8V), а его масса M , поэтому плотность материала равна

$$\rho_{\text{мат}} = \frac{M}{0,2V} = 5 \frac{M}{V} = 5\rho.$$

Критерий	Содержание	Балл
3.1	Определение средней плотности шарика	0,5 балла
3.2.	Определение объёма полости записано выражения для ρ_1 записано выражения для ρ_2 правильно проделаны математические преобразования, получен правильный ответ в общем виде подставлены числовые значения, определено 0,8V	2,5 балла (0,5 баллов) (0,5 баллов) (1 балл) (0,5 балла)

3.3.	Определение во сколько раз плотность материала шарика больше его средней плотности установлено, что объем материала равен 0,2V найдено отношение (5) найдено числовое значение (5000 кг/м³)	2 балла (1 балл) (0,5 баллов) (0,5 баллов)
------	--	--

4. Тонет - не тонет? (5 баллов)

Кубик плотности ρ плавает в воде, погрузившись на $1/3$ своего объёма.

- чему равна плотность материала кубика? (0,5 баллов)

Назовем этот кубик маленьким и обозначим его массу m .

Кубик с вдвое большим ребром изготовили из материала с вдвое большей плотностью.

- во сколько раз масса нового кубика M больше массы маленького кубика? (0,5 баллов)

- на какую глубину погрузится большой кубик, будет ли он плавать? (2 балла);

- сколько маленьких кубиков можно разместить на большом без риска его затопления? (2 балла)

Плотность воды известна и равна $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$. Ребро кубика 30 см.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Определим плотность маленького кубика ρ . Обозначим его ребро a . Так как он плавает, погрузившись на $1/3$ своего объёма, то

$$\rho a^3 g = \frac{1}{3} \rho_B a^3 g.$$

Из записанного соотношения определяем плотность кубика

$$\rho = \frac{1}{3} \rho_B,$$
$$\rho = \frac{1000}{3} = 333 \text{ кг/м}^3.$$

Определим массу большого кубика M

$$M = 2\rho \cdot (2a)^3 = 16\rho \cdot a^3 = 16m.$$

Таким образом, масса большого кубика больше массы маленького в 16 раз.

Определим глубину его погружения h

$$2\rho \cdot (2a)^3 g = (2a)^2 \cdot h \cdot \rho_B \cdot g.$$

Так как плотность тела равна

$$\rho = \frac{1}{3} \rho_B,$$

то

$$\frac{16}{3} \cdot \rho_B \cdot a = 4 \cdot h,$$

Следовательно,

$$h = \frac{4}{3} a = 40 \text{ см.}$$

Этот кубик будет погружен в воду на $2/3$ своего объема. Так как ребро большого куба равно $2a$, то он будет плавать.

Теперь выясним, груз какой максимальной массы m_x можно поместить на большой кубик, чтобы он мог плавать

$$(M + m_x)g = (16m + m_x)g = (2a)^3 \rho_B g.$$

Из записанного соотношения находим, что

$$m_x = 8m.$$

Критерий	Содержание	Балл
4.1	Определена масса маленького кубика	0,5 баллов
4.2.	Масса большого кубика в 16 раз больше массы маленького	0,5 баллов
4.3.	Плавание большого кубика записано равенство сил тяжести и Архимеда (если $mg = F_{Арх}$, то 0,25 баллов, если более подробно, то до 1 балла) определена глубина погружения сделан вывод, что большой кубик плавает	2 балла до 1 балла 1 балл 0,5 баллов
4.4.	Определена масса, которую можно поместить на большой кубик без риска его затопления Установлено, сколько маленьких кубиков содержится в этой массе	1 балл 1 балл

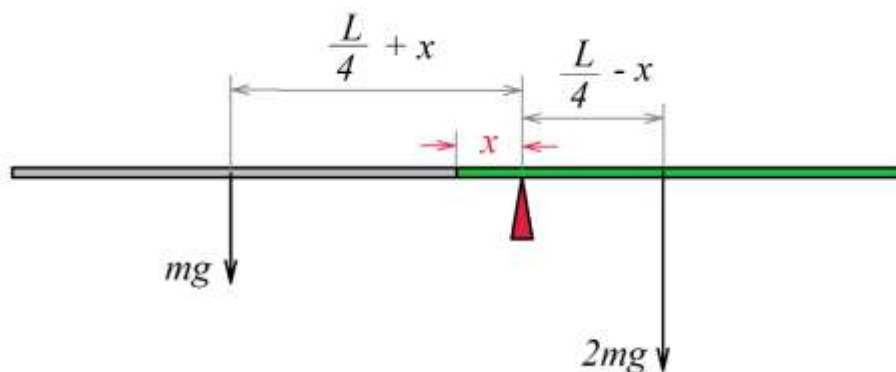
5.Хитрый рычаг (10 баллов)

5.1.Рычаг имеет длину L и изготовлен из двух частей, имеющих одинаковые геометрические размеры, плотность левой части равна ρ , плотность правой части равна 2ρ . На каком расстоянии x от середины рычага следует поставить опору, чтобы рычаг был горизонтален? (3 балла)

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Очевидно, что опору нужно разместить на более тяжелой части рычага.

Рисуем рычаг, расставляем силы тяжести, действующие на половинки рычага и записываем правило моментов



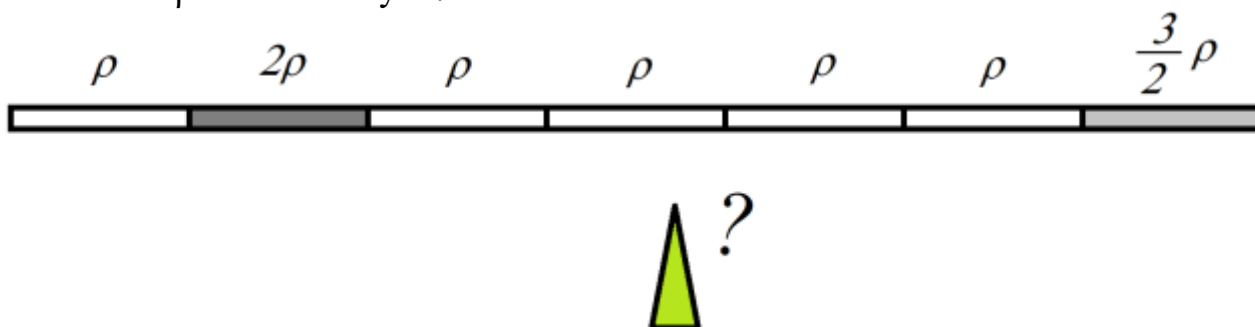
$$mg \left(\frac{L}{4} + x \right) = 2mg \left(\frac{L}{4} - x \right).$$

Здесь m – масса части, имеющей плотность ρ . Из записанного соотношения определяем x

$$x = \frac{L}{12}.$$

Критерий	Содержание	Балл
5.1.1	Есть рисунок, на котором верно указаны силы тяжести (значения и точки приложения)	1
5.1.2.	Записано правило моментов	1
2.2.3.	Проделаны математические преобразования, найдено нужное расстояние	1

5.2.Рычаг изготовлен из семи стержней одинаковой длины и площади поперечного сечения, плотности всех стержней указаны на рисунке. Стержень плотности ρ имеет массу m .



Определить:

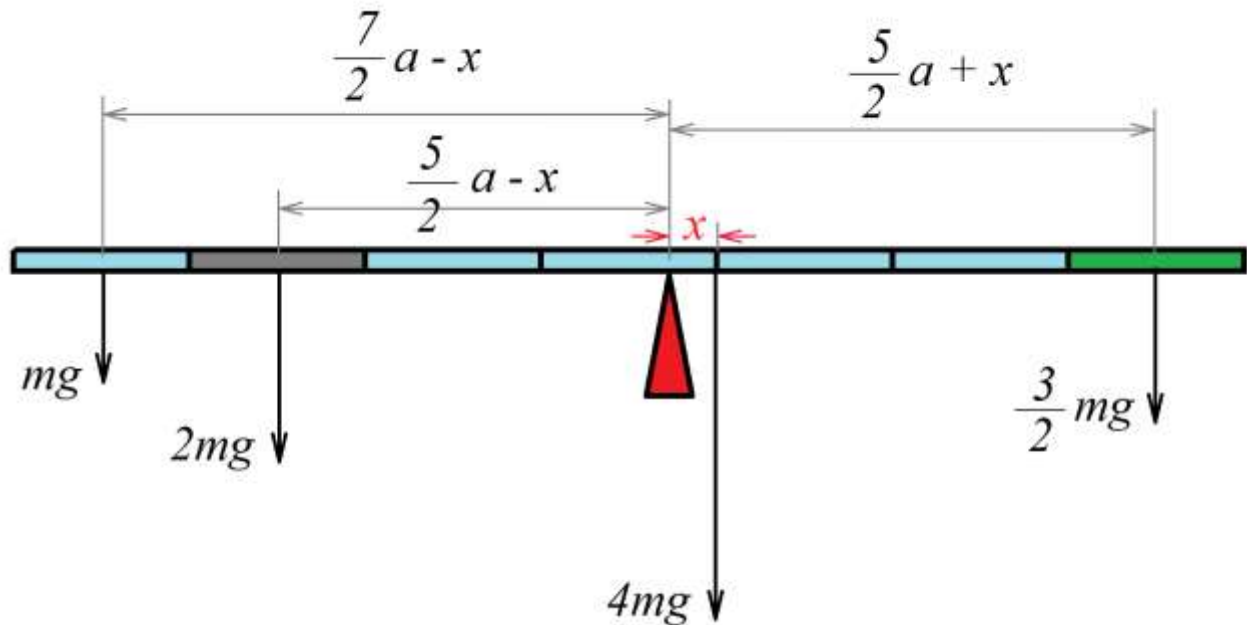
- массу всей конструкции (1 балл);
- в каком месте следует разместить опору, чтобы стержень был горизонтален (6 баллов)?

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Начнем решение с того, что найдем массу всей конструкции М

$$M = m + 2m + 4m + \frac{3}{2}m = \frac{17}{2}m = 8,5m.$$

Предположим, что опору нужно разместить на расстоянии x от правого края четвёртого стержня (считаем слева). Запишем правило моментов, величины сил



тяжести, их точки приложения и их плечи указаны на рисунке

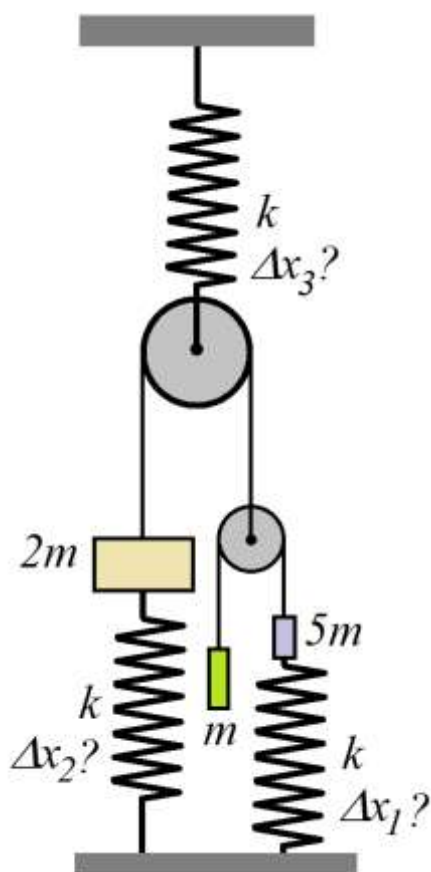
$$mg \left(\frac{7}{2}a - x \right) + 2mg \left(\frac{5}{2}a - x \right) = 4mgx + \frac{3}{2}mg \left(\frac{5}{2}a + x \right).$$

Здесь a – длина одного стержня.

Из записанного соотношения определяем x

$$x = \frac{19}{34}a.$$

Критерий	Содержание	Балл
5.2.1	Верно определена масса конструкции М	1
5.2.2.	Есть рисунок, верно указаны силы и их точки приложения (плечи всех сил верны) по 0,5 балла за каждую пару сила-плечо	2
5.2.3.	Верно записано правило моментов (именно моментов), а не выражение с «убитым» ускорением силы тяжести	1
5.2.4.	Проделаны математические преобразования, найдено искомое расстояние есть разумные преобразования, но ошибка в счете, ведущая к ошибочному ответу	до 3 баллов 1 балл



6. Грузы, блоки, нити и пружинки (10 баллов)

Из трёх пружин с одинаковым коэффициентом жёсткости k , невесомых и нерастяжимых нитей, трех грузов, массы которых указаны на рисунке, и двух невесомых блоков собрана конструкция, все элементы которой находятся в покое.

Определить деформацию всех пружин. В ответе следует указать: пружина номер сжата (растянута), величина деформации равна ...

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Тело массой m находится в покое, поэтому

$$mg = T_1,$$

где T_1 – сила натяжения нити, прикрепленной к этому телу.

Для правого подвижного блока, так как он невесом, условие равновесия выглядит следующим образом:

$$2T_1 = T_2.$$

Здесь T_2 – сила натяжения второй нити.

Для верхнего подвижного блока (он также невесом) запишем условие равновесия

$$F_{\text{упр3}} = 2T_2 = 4T_1 = 4mg.$$

Из последнего выражения находим величину деформации третьей пружины

$$\begin{aligned} F_{\text{упр3}} &= k \cdot \Delta x_3; \\ \Delta x_3 &= \frac{4mg}{k_3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим условие равновесия тела $5m$: вверх его тянет сила T_1 , равная mg , вниз работает сила тяжести $5mg$, чтобы тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы первая пружина действовала на это тело вверх с силой $4mg$. Это означает, что она должна быть сжата. Величина растяжения первой пружины равна

$$\Delta x_1 = \frac{4mg}{k_1}.$$

Теперь рассмотрим тело массой $2m$. Вниз на него действует сила тяжести, равная $2mg$, вверх тянет вторая нить с силой натяжения, равной $2mg$. Следовательно, вторая пружина не деформирована.

Критерий	Содержание	Балл
6.1	Верно выбрано «начало» решения задачи – начато рассмотрение с тела m , записано его условие равновесия	1 балл
6.2.	Записаны условия равновесия тел $2m$ и $5m$ по баллу за каждое тело	2 балла
6.3.	Связаны силы натяжения нитей (два подвижных блока)	1 балла

6.4.	Найдена величина деформации (растяжения, сжатие) первой пружины 1 балл – сжатие растяжение 1 балл - величина	2 балла
6.5.	Найдена величина деформации (растяжения, сжатие) второй пружины 1 балл – сжатие растяжение 1 балл - величина	2 балла
6.6.	Найдена величина деформации (растяжения, сжатие) третьей пружины 1 балл – сжатие растяжение 1 балл - величина	2 балла