ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в 8 химбио класс
(2021, очный этап)

1. (6 баллов) Найдите X из пропорции

$$\frac{X}{10,5\cdot 0,24-15,15:7,5}=\frac{9\cdot\left(1\frac{11}{20}-0,945:0,9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$$

Решение.

$$\frac{X}{2,52-2,02}=\frac{9\cdot(1,55-1,05)}{1,075-0,625}$$
$$X=\frac{9\cdot 0,5\cdot 0,5}{0,45}$$
$$X=5.$$

Ответ: 5.

2. (6 баллов) Упростите выражение

$$\left(\frac{16}{a^2-4a+16}+\frac{2a}{a+4}-\frac{a^3-20a^2}{a^3+64}\right)\cdot\left(a+4-\frac{12a}{a+4}\right)\cdot\frac{1}{4+a}.$$

Решение. Упростим выражение в первой скобке:

$$\frac{16}{a^2-4a+16}+\frac{2a}{a+4}-\frac{a^3-20a^2}{a^3+64}=\frac{16}{a^2-4a+16}+\frac{2a}{a+4}-\frac{a^3-20a^2}{(a+4)(a^2-4a+16)}=$$
$$=\frac{16(a+4)+2a(a^2-4a+16)-a^3+20a^2}{(a+4)(a^2-4a+16)}=\frac{a^3+12a^2+48a+64}{(a+4)(a^2-4a+16)}=$$
$$=\frac{(a+4)^3}{(a+4)(a^2-4a+16)}=\frac{(a+4)^2}{a^2-4a+16}.$$

Выражение во второй скобке:

$$a+4-\frac{12a}{a+4}=\frac{(a+4)^2-12a}{a+4}=\frac{a^2-4a+16}{a+4}.$$

Итак, получаем:

$$\frac{(a+4)^2}{a^2-4a+16}\cdot\frac{a^2-4a+16}{a+4}\cdot\frac{1}{4+a}=1.$$

Ответ: 1.

3. Имеются два сосуда с раствором щелочи разных концентраций. Первый сосуд содержит 4 л раствора, второй 6 л раствора. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% щелочи. Если же слить вместе по 3 л из каждого сосуда, то получится раствор, содержащий a% щелочи.

а) (5 балла) Пусть $a=30$. Сколько литров щелочи содержит второй сосуд?

б) (5 балла) Сколько литров щелочи содержит второй сосуд в зависимости от значения параметра a?

Решение.

Пусть концентрация в первом сосуде составляет x, а во втором y. Тогда

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10 \cdot 0,35, \\ 3x + 3y = 6 \cdot \dfrac{a}{100}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 4 и вычтем результаты. Получим

$$18y - 12y = 3 \cdot 3,5 - 0,24a.$$

Откуда $6y = 10,5 - 0,24a$ – литров щелочи во втором сосуде.

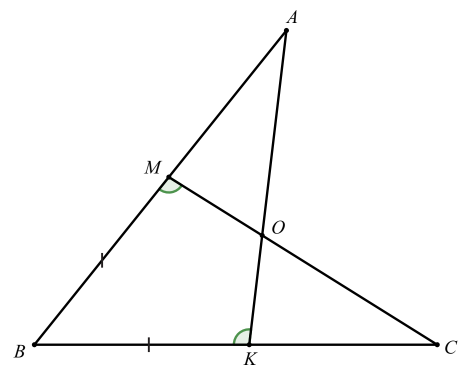
Если $a = 30$, то во втором сосуде $10,5 - 0,24 \cdot 3 = 3,3$ л щелочи.

Ответ: а) $3,3$; б) $10,5 - 0,24a$.

4. (5 баллов) На сторонах угла ABC отмечены точки M и K так, что углы BMC и BKA равны, $BM = BK$, $AB = 15$, $BK = 8$, $CM = 9$. Найдите периметр треугольника COK, где O – точка пересечения прямых AK и CM.

Решение. Рассмотрим треугольники BMC и BKA:

$$\left.\begin{array}{l} BM = BK \\ \angle B \text{ – общий} \\ \angle BMC = \angle BKA \end{array}\right| \Rightarrow \triangle\ BMC = \triangle\ BKA.$$



Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов: $KC = AM = 7$, $\angle BCM = \angle BAK$. Рассмотрим треугольники KOC и MOA:

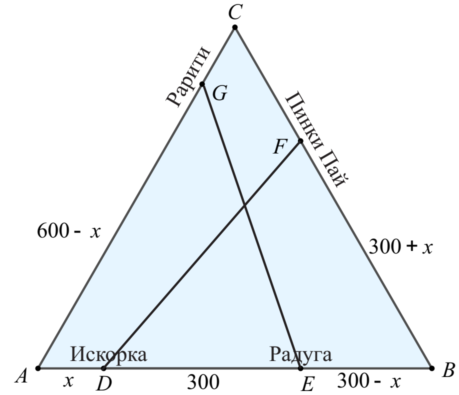
$$\left.\begin{array}{l} KC = AM \\ \angle KOC = \angle MOA \text{ вертикальные} \\ \angle BCM = \angle BAK \end{array}\right| \Rightarrow \triangle\ KOC = \triangle\ MOA.$$

Из равенства треугольников следует, что $MO = OK$. Значит,

$$P_{\triangle KOC} = KC + CO + OK = KC + CO + OM = KC + CM = 7 + 9 = 16.$$

Ответ: 16.

5. (5 баллов) Пони Эквестрии живут на берегах волшебного пруда в форме равностороннего треугольника со стороной 600 метров. Искорка и Радуга живут на одном берегу в 300 метрах друг от друга. Летом Пинки Пай до Искорки идти 900 метров, Радуге до Рарити – тоже 900 метров. Докажите, что зимой, когда пруд замёрзнет и можно будет ходить прямо по льду, Пинки Пай до Искорки снова будет идти столько же метров, сколько Радуге до Рарити.



Решение. Отметим на рисунке указанные в условии расстояния. Рассмотрим треугольники AGE и BDF:

$$\left.\begin{array}{l} \angle BAC = \angle ABC = 60^o \\ AG = \mathrm{B}D = 600 - x \\ AE = FB = 300 + x \end{array}\right| \Rightarrow \triangle\ AGE = \triangle\ BDF.$$

6. *(4 балла)* а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

(6 балла) б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

(8 балла) в) Какое наибольшее число цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Решение.

а) Например, если из числа 123456789 вычеркнуть цифры 2, 7 и 9, то получится число 134568, кратное 72.

б) Предположим, что можно вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72.

Если число кратно 72, то оно чётное. Значит, цифры 7, 5, 3 и 1 должны быть вычеркнуты. Получается число 84692. Оно не кратно 72, поэтому из него надо вычеркнуть цифры так. чтобы получилось число, кратное 72. Значит, сумма оставшихся цифр должна делиться на 9, то есть сумма вычеркнутых цифр должна быть равна 2, 11 или 20. Это возможно, только если вычеркнуть или 2, или 2 и 9, или 2, 4, 6 и 8. Ни одно из получающихся чисел: 8469, 846. 9 — не делится на 72.

в) Заметим, что все цифры числа 124875963 различны и не равны нулю.

Если вычеркнуть из исходного числа 8 или 7 цифр, то получится число, меньшее 100. Среди таких чисел только 72 делится на 72, но его нельзя получить при вычёркивании цифр из исходного числа.

Если вычеркнуть из исходного числа 6 цифр, то получится трёхзначное число. Среди трёхзначных чисел, все цифры в которых различны и не равны нулю, на 72 делятся только следующие: 216, 432, 576, 648, 792, 864, 936. Ни одно из них нс получается при вычёркивании из числа 124875963 нескольких цифр.

Значит, нельзя вычеркнуть более 5 цифр так, чтобы получившееся число было кратно 72. Пять цифр вычеркнуть можно. Например, если вычеркнуть цифры 4, 8. 7, 5 и 3. то получится число 1296, кратное 72.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Критерии

1. 6 баллов
1 балл – верно вычислено значение знаменателя в левой части равенства;
1 балл – верно вычислено значение числителя в правой части равенства;
1 балл – верно вычислено значение знаменателя в правой части равенства;
2 балла – верно выражен X из пропорции;
1 балл – верно вычислено значение X.

2. 6 баллов
1 балл – верно применена формула суммы кубов;
1 балл – верно выполнено приведение к общему знаменателю в первой скобке;
2 балл – верное применение формулы куба суммы в числителе;
1 балл – верно выполнено приведение к общему знаменателю во второй скобке;
1 балл – верно выполнено сокращение дробей и получен правильный ответ.

3. а) 5 баллов
2 балла – верно составлена система уравнений;
3 балл – верно решена система уравнений.

3. б) 5 баллов
2 балла – верно составлена система уравнений относительно параметра a;
3 балл – верно решена система уравнений в зависимости от параметра a.

4. 5 баллов
2 балла – доказано равенство треугольников BMC и BKA;
2 балла – доказано равенство треугольников KOC и MOA;
1 балл – верно найден искомый периметр.

5. 5 баллов
2 балла – верно составлена геометрическая модель задачи;
3 балла – доказано требуемое утверждение или задача верно решена для частного случая расположения домов Пинки Пай и Рарити;

6. а) Верный пример – 3 балла.
Только ответ без примера – 1 балл.

б) Отмечено, что нечетные цифры на конце необходимо вычеркнуть, дальнейших продвижений нет – 1 балл.
Доказано, что из 84692 нельзя получить число, делящееся на 72 – 5 баллов.
Есть попытка доказать, что из 84692 нельзя получить число, делящееся на 72, на основе рассмотрения сумм цифр, которые необходимо вычеркнуть, но перебор сумм неполный (забыты некоторые варианты) – по 1 баллу за каждый случай суммы.

в) Показано, что нельзя вычеркнуть 8 или 7 цифр – 2 балл.
Показано, что нельзя вычеркнуть 6 цифр – 3 балла.
Пример, подтверждающий, что можно вычеркнуть 5 цифр – 3 балл.
Только верный ответ – 1 балл.