СУНЦ УрФУ, 2021 год
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 8 МИ и 8 ФМ классы

1. *(5 баллов)* Вычислите значение выражения $a+\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$ при $a=25$, $x=1,125$.
Решение. Заметим, что $3a^2+2ax-x^2=3a^2+3ax-ax-x^2=3a(x+a)-x(a+x)=(a+x)(3a-x)$. Выполним преобразования и в конце подставим a и x: $a+\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}=a+\frac{(3a-x)(a+x)}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{x(a-3x)}{(a-3x)(a+3x)}=a+\frac{3a-x}{3x+a}-2+\frac{10x}{a+3x}=a-2+\frac{3a+9x}{a+3x}=a-2+3=a+1=26$.

Ответ: 26.

2. *(6 баллов)* На дереве растут ягоды гроздьями по 7 или 17 ягод. В Машино лукошко помещается только 61 ягода. Какое наибольшее количество ягод может собрать Маша, если она кладет в лукошко только целые грозди?

Решение. Предположим, что Маша может собрать 61 ягоду. Пусть она собрала a гроздей по 7 ягод и b гроздей по 17 ягод. Тогда $7a+17b=61$, откуда следует, что $b\leqslant 3$.

Если $b=0$, то $7a=61$, если $b=1$, то $7a=44$, если $b=2$, то $7a=27$, если $b=3$, то $7a=10$. Все эти случаи невозможны, так как a — целое.

Предположим, что Маша может собрать 60 ягоду. Пусть она собрала a гроздей по 7 ягод и b гроздей по 17 ягод. Тогда $7a+17b=60$, откуда следует, что $b\leqslant 3$.

Если $b=0$, то $7a=60$, если $b=1$, то $7a=43$, если $b=2$, то $7a=26$, если $b=3$, то $7a=9$. Все эти случаи невозможны, так как a — целое.

Маша могла собрать 59 ягод, для этого ей надо взять 6 гроздей по 7 ягод и 1 гроздь из 17 ягод.

Ответ: 59.

3. *(2 балла)* а) Решите систему $\begin{cases}-3x+3y=5,\\(a+6)x+ay=7\end{cases}$ при $a=3$.

(3 балла) б) Найдите, при каких значениях параметра a у системы $\begin{cases}-3x+3y=5,\\(a+6)x+ay=7\end{cases}$ нет решений.

Решение. а) При $a=3$ получим $\begin{cases}-3x+3y=5,\\9x+3y=7.\end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое, имеем $12x=2$, откуда $x=\frac{1}{6}$, подставив это значение в первое уравнение, найдем y: $y=\frac{1}{3}\left(5+\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{6}$.

б) Заметим, что при $a=0$ система примет вид $\begin{cases}-3x+3y=5,\\6x=7.\end{cases}$ У этой системы есть решение $\left(\frac{7}{6},\frac{17}{6}\right)$. Пусть $a\neq 0$, тогда систему можно переписать в виде $\begin{cases}y=x+\frac{5}{3},\\y=-\frac{a+6}{a}x+\frac{7}{a},\end{cases}$ где каждое из уравнений задает прямую на плоскости. Система не имеет решение в том и только том случае, если прямые не имеют общих точек. Для этого необходимо равенство коэффициентов при x: $1=-\frac{a+6}{a}$, откуда $a+6=-a$, значит, $a=-3$. Отметим, что свободные коэффициенты при этом значении a не совпадают: $\frac{5}{3}\neq-\frac{7}{3}$, значит, уравнения задают две параллельные прямые и система не имеет решений поэтому.

Ответ: а) $\left(\frac{1}{6},\frac{11}{6}\right)$; б) $a=-3$.

4. *(2 балла)* а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

(3 балла) б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

(4 балла) в) Какое наибольшее число цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Решение. а) Например, если из числа 123456789 вычеркнуть цифры 2, 7 и 9, то получится число 134568, кратное 72.

б) Предположим, что можно вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72.

Если число кратно 72, то оно четное. Значит, цифры 7, 5, 3 и 1 должны быть вычеркнуты. Получается число 84692. Оно не кратно 72, поэтому из него надо вычеркнуть цифры так, чтобы получилось число, кратное 72. Значит, сумма оставшихся цифр должна делиться на 9, то есть сумма вычеркнутых цифр должна быть равна 2, 11 или 20. Это возможно, только если вычеркнуть или 2, или 2 и 9, или 2, 4, 6 и 8. Ни одно из получающихся чисел: 8469, 846, 9 — не делится на 72.

в) Заметим, что все цифры числа 124875963 различны и не равны нулю.

Если вычеркнуть из исходного числа 8 или 7 цифр, то получится число, меньшее 100. Среди таких чисел только 72 делится на 72, но его нельзя получить при вычеркивании цифр из исходного числа.

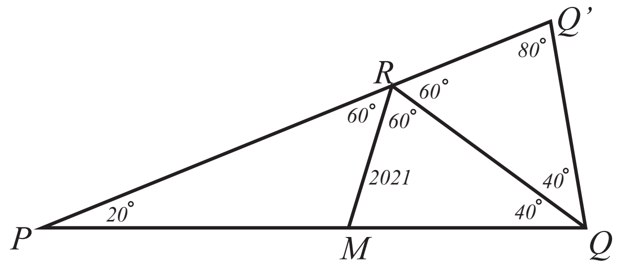
Если вычеркнуть из исходного числа 6 цифр, то получится трехзначное число. Среди трехзначных чисел, все цифры в которых различны и не равны нулю, на 72 делятся только следующие: 216, 432, 576, 648, 792, 864, 936. Ни одно из них не получается при вычеркивании из числа 124875963 нескольких цифр.

Значит, нельзя вычеркнуть более 5 цифр так, чтобы получившееся число было кратно 72. Пять цифр вычеркнуть можно. Например, если вычеркнуть цифры 4, 8. 7, 5 и 3. то получится число 1296, кратное 72.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

5. *(6 баллов)* В треугольнике PRM сторона RM равна 2021, а угол MPR равен $20°$. На продолжении стороны PM за точку M отмечена точка Q так, что $\angle PQR = 40°$. Оказалось, что RM является биссектрисой угла PRQ. Найдите разность $PQ - PR$.

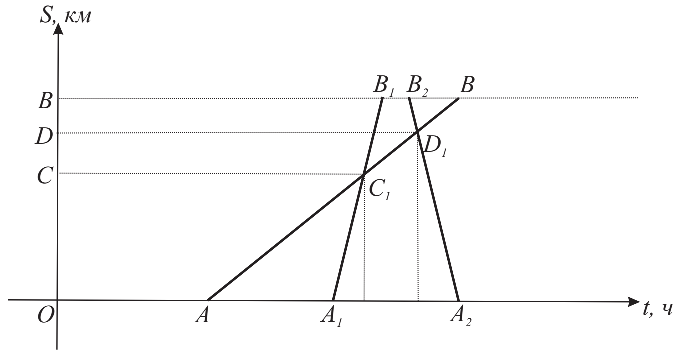
Решение. На луче PM за точкой M отметим точку Q' так, что $PQ' = PQ$, тогда искомая разность равна $PQ - PR = PQ' - PR = RQ'$. В равнобедренном треугольнике PQQ': $\angle PQ'Q = \angle PQQ' = 80°$, откуда $\angle RQQ' = 80° - 40° = 40°$. Так как RM – биссектриса угла PRQ, $\angle PRQ = 180° - 20° - 40° = 120°$, получаем $\angle PRM = \angle MRQ = \angle QRQ' = 60°$. Треугольники MRQ и RQQ' равны по стороне и двум прилежащим углам. Поэтому $RQ' = MR = 2021$.

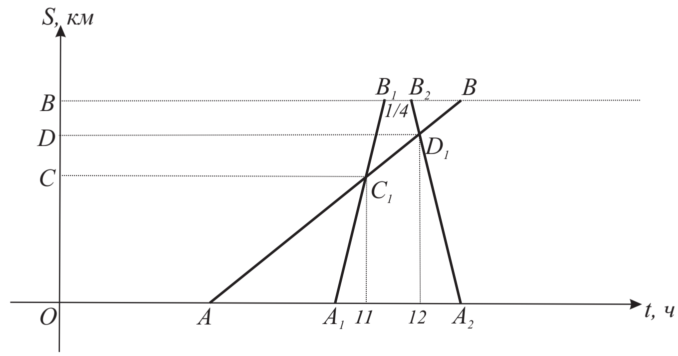


Ответ: 2021.

6. Велосипедист Кирилл отправляется из деревни Антоновки в село Мосино. На пути из Антоновки в Мосино он встречает в 11 часов пешехода Колю, который вышел из Антоновки раньше и движется со скоростью, в 4 раза меньшей скорости Кирилла. Добравшись до Мосина, после перерыва продолжительностью 15 минут, Кирилл возвращается в Антоновку тем же путем. В 12 часов происходит вторая встреча Коли и Кирилла.
(3 балла) а) На рисунке ниже в системе координат OSt (по оси OS показано расстояние между Антоновкой (точка O) и Мосино (точка B) в километрах, на оси Ot – время в часах) показаны зависимости расстояния от времени движения Коли и Кирилла. Найдите абсциссы точек C_1 и D_1 и длину промежутка B_1B_2.
(6 баллов) б) Определите время, в которое Кирилл выехал изначально из Антоновки, если известно, что Кирилл возвращается в Антоновку одновременно с прибытием Коли в Мосино. При этих же условиях найдите, во сколько Коля вышел из Антоновки.

Решение.





а) Ясно, что абсциссы точек C_1 и D_1 равны 11 и 12 соответственно, а длина B_1B_2 равна 1/4 (см. рисунок справа).

б) Обозначим через x км/ч скорость Коли, тогда скорость Кирилла равна $4x$ км/ч. Тогда с 11 до 12 часов Коля прошел расстояние $CD = x$ км, а Кирилл проехал за это время путь, равный $CD + DB + BD = 4x \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3x$. Поскольку $DB = BD$, $CD = x$, получаем, что $CD = DB = BD = x$ км, значит, Коля с момента второй встречи до прибытия в Мосино прошел $DB = x$ км за один час и его путешествие в пункт B, как и путешествие Кирилла из O в B и обратно, закончилось в 13 часов. Тогда Кирилл за час преодолел расстояние $OD = 4x$ км, а общее расстояние между Антоновкой и Мосино составляет $OD + DB = 5x$ км, которое Кирилл проехал за $\frac{5}{4}$ ч, поэтому выехал из Антоновки он в $13 - \frac{5}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 10\frac{1}{4}$ ч. Расстояние между пунктами Коля прошел за 5 часов, значит, вышел из Антоновки он 8 ч утра.

Ответ: а) 11, 12, 1/4; б) 10 ч 15 мин, 8 ч.

7. Из списка выберите номера верных признаков равенства треугольников:

(2 балла) 1. по двум сторонам и углу,

(2 балла) 2. по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины,

(2 балла) 3. по двум сторонам и высоте, выходящим из одной вершины,

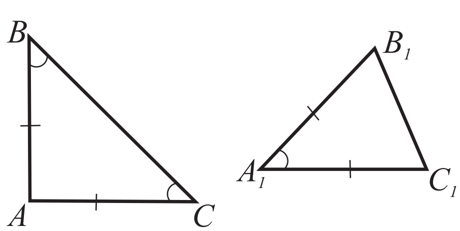
(2 балла) 4. по стороне, медиане и высоте, выходящим из одной вершины,

(2 балла) 5. по двум углам и высоте, проведенной из вершины одного из них (высота проведена из соответственно равных углов).

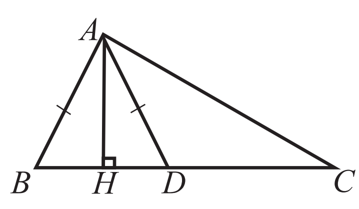
Для каждого пункта требуется обосновать, почему он содержит верный (или неверный) признак.

Решение. Пункты 1, 3, 4 содержат неверные признаки. На рисунках ниже показаны примеры пар неравных треугольников, где указанные элементы равны.

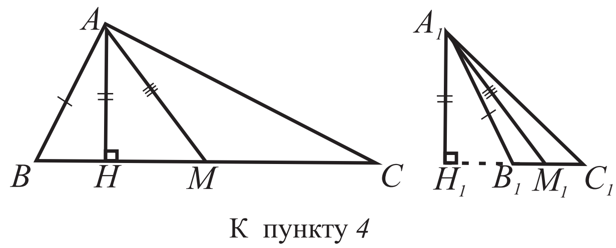
На первом рисунке приведены два равнобедренных треугольника, один из которых прямоугольный, а другой – остроугольный. На рисунке к третьему пункту не являются равными остроугольный треугольник ABC и тупоугольный треугольник ADC, но в них общая сторона AC, стороны AB и AD равны, высота AH общая. На рисунке к четвертому показаны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, где равны медианы AM и A_1M_1, стороны AB и A_1B_1, высоты AH и A_1H_1, однако треугольники не равны.



К пункту *1*

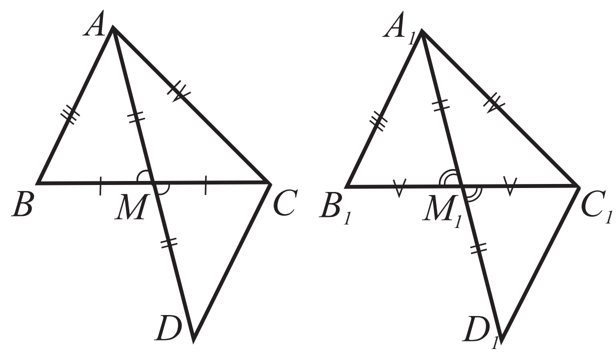


К пункту *3*



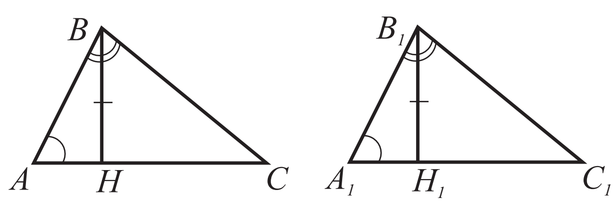
К пункту *4*

Покажем, что пункт 2 содержит верный признак. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 – медианы. Продолжим отрезки AM и A_1M_1 за точки M и M_1 так, что M и M_1 окажутся серединами AD и A_1D_1. Треугольники AMB и DMC равны по двум сторонам и углу между ними, аналогично равны $A_1M_1B_1$ и $D_1M_1C_1$. Из равенств треугольников получаем равенство сторон: $DC = AB$, $A_1B_1 = D_1C_1$, но по условию $AB = A_1B_1$, поэтому $DC = D_1C_1$, а тогда треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны по трем сторонам, откуда вытекает равенство углов: $\angle DAC = \angle D_1A_1C_1$. Значит, треугольники MAC и $M_1A_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $MC = M_1C_1$ и поэтому $BC = 2MC = 2M_1C_1 = B_1C_1$, значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.



К пункту *2*

Покажем, что пункт 5 содержит верный признак. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, а равными высотами являются BH и B_1H_1. Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и острому углу, тогда $AB = A_1B_1$, $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$. Так как $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, либо лучи BH и B_1H_1 лежат одновременно во внутренних областях этих углов (и тогда $\angle HBC = \angle ABC - \angle ABH = \angle A_1B_1C_1 - \angle A_1B_1H_1 = \angle H_1B_1C_1$), либо BС и B_1С$_1$ лежат одновременно во внутренних областях $\angle ABH$ и $\angle A_1B_1H_1$ (и тогда $\angle HBC = \angle ABH - \angle ABC = \angle A_1B_1H_1 - \angle A_1B_1C_1 = \angle C_1B_1H_1$). Итак, $\angle CBH = \angle C_1B_1H_1$, поэтому прямоугольные треугольники HBC и $H_1B_1C_1$ равны по катету и острому углу, откуда $BC = B_1C_1$, значит, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ получаем: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Поэтому треугольники равны.



К пункту *5*

Ответ: 2 и 5.

Критерии оценивания заданий очного вступительного испытания по математике в 8 ФМ и 8 МИ классы

В любом задании при неверно переписанном условии решение оценивается 0 баллов.

1. Верно разложен на множители числитель первой дроби – 2 балла.
Применение формулы разности квадратов для второй дроби – 1 балл.
Приведение дробей к общему знаменателю – 1 балл.
Верный ответ – 1 балл.
Если все шаги решения выполнены, получен ответ, но решение содержит вычислительную ошибку или описку, снимается 1 балл.

При вычислении непосредственной подстановкой чисел, если ответ числовой получен, снимается 1 балл за каждую вычислительную ошибку.

2. При неполном решении оцениваются следующие продвижения.
Составлено верное уравнение – 1 балл.
При неполном решении доказано, что Маша не могла положить 61 ягоду – 3 балла.
При неполном решении доказано, что Маша не могла положить 60 ягод – 3 балла.
Показано, что Маша могла положить 59 ягод – 1 балл.
Только верный ответ – 1 балл.

Если есть идея перебора, но решение не доведено до конца – 2 балла.

Есть перебор вариантов, получен верный ответ, но перебор неполный – 4 балла.

3. а) Верное решение – 2 балла.
Ответ получен, но он неверный из-за арифметической ошибки – 1 балл. Найдено верно только x или y – 1 балл.

б) Отмечено, что уравнения системы на плоскости задают прямые – 1 балл.
Записано условие параллельности прямых для исходной системы – 1 балл.
Найдено значение параметра – 1 балл.

Если показано, что $a = -3$ подходит, но не доказано, почему другие значения не подходят – 1 балл.

Если при выражении y из уравнений системы через x не рассмотрен случай $a = 0$, снимается 1 балл.

4. а) Верный пример – 2 балла.
Только ответ без примера – 1 балл.

б) Отмечено, что нечетные цифры на конце необходимо вычеркнуть, дальнейших продвижений нет – 1 балл.
Доказано, что из 84692 нельзя получить число, делящееся на 72 – 3 балла.
Есть попытка доказать, что из 84692 нельзя получить число, делящееся на 72, на основе рассмотрения сумм цифр, которые необходимо вычеркнуть, но перебор сумм неполный (забыты некоторые варианты) – по 1 баллу за каждый случай суммы.

в) Показано, что нельзя вычеркнуть 8 или 7 цифр – 1 балл.
Показано, что нельзя вычеркнуть 6 цифр – 2 балла.
Пример, подтверждающий, что можно вычеркнуть 5 цифр – 1 балл.
Только верный ответ – 1 балл.

5. Подсчет углов в треугольнике PQR – 1 балл.
Треугольник достроен до равнобедренного или верно используется идея симметрии относительно биссектрисы угла P – 2 балла.
Доказано равенство треугольников MRQ и RQQ' – 2 балла.
Верный ответ – 1 балл.

6. а) По одному баллу за абсциссы точек и длину отрезка.

б) Верно составлена математическая модель, но дальнейших продвижений нет – 1 балл.
Найдено время окончания путешествий пешехода и велосипедиста – 2 балла.
Установлена связь между скоростью и расстоянием между пунктами для Кирилла (или Коли),

откуда можно найти время его движения – 1 балл.
Обоснованно найдено время выезда Кирилла – 1 балл.
Обоснованно найдено время выхода Коли – 1 балл.

7. Верные примеры, иллюстрирующие отсутствие равенства треугольников, для пунктов 1, 3, 4 – по 2 балла за каждый.
В доказательстве признака пункта 2 есть идея удвоения медианы, но доказательство не завершено – 1 балл.
В доказательстве признака пункта 5 указаны верные пары равных прямоугольных треугольников – 1 балл.
Только верный ответ в каждом пункте – 1 балл.