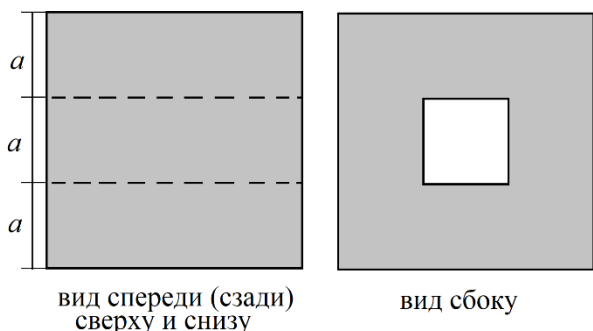


1. Деталь



Из материала с плотностью $\rho > \rho_0$, где ρ_0 – плотность воды, изготовлена деталь кубической формы с ребром куба $3a$, со сквозным отверстием (см. рисунок). Деталь размещена на дне аквариума. В аквариум медленно и аккуратно наливают воду, таким образом, что между дном аквариума и нижней

поверхностью детали вода не подтекает. Определите силу F , с которой деталь давит на дно в зависимости от высоты воды h в аквариуме.

Возможное решение:

Определим массу детали m

$$m = 24\rho a^3.$$

Если уровень жидкости $h < a$, то так как жидкость под деталь не подтекает, то сила давления детали на дно совпадает с силой тяжести

$$F_{\text{давл}} = mg = 24\rho a^3 g.$$

Если уровень жидкости $a < h < 2a$, то жидкость оказывает давление $\rho_0 g(h - a)$ на нижнюю грань отверстия. Так как площадь нижней грани равна $3a^2$, то сила давления равна

$$F_{\text{давл}} = 24\rho a^3 g + \rho_0 g(h - a) \cdot 3a^2.$$

Если продолжить увеличивать уровень жидкости дальше, то при $2a < h < 3a$, жидкость начнет оказывать давление на верхнюю грань отверстия, уменьшая силу давления детали на дно

$$F_{\text{давл}} = 24\rho a^3 g + \rho_0 g(h - a) \cdot 3a^2 - \rho_0 g(h - 2a) \cdot 3a^2 = 24\rho a^3 g + \rho_0 g 3a^3.$$

Когда уровень жидкости становится больше $3a$ $h > 3a$, то сила давления на дно равна

$$\begin{aligned} F_{\text{давл}} &= 24\rho a^3 g + \rho_0 g(h - 3a) \cdot 9a^2 + \rho_0 g 3a^2 \\ &= 24\rho a^3 g + \rho_0 g(3h - 8a) \cdot 3a^2. \end{aligned}$$

Критерии проверки:

№	Содержание критерия	Балл
1	Определена масса детали (или объем)	2
2	Определена сила давления при $h < a$	3

3	Определена сила давления при $a < h < 2a$,	4
4	Определена сила давления при $2a < h < 3a$	3
5	Определена сила давления при $h > 3a$	3

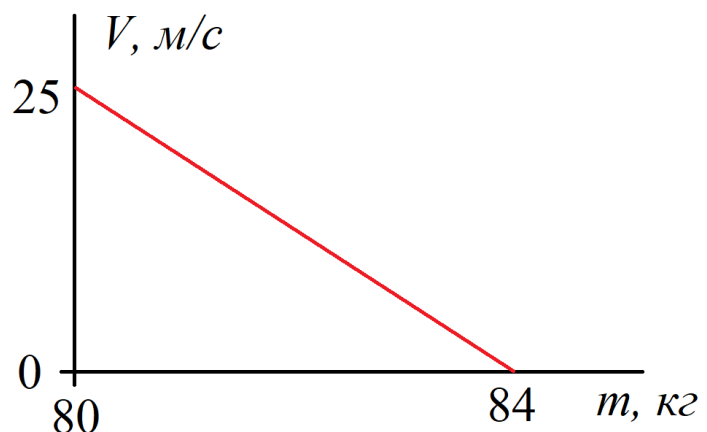


2. После самоизоляции

Карлсон, навестив свою бабушку, возвращался домой. Бабушка, заботясь о внуке, во время самоизоляции собрала из подручных материалов дрона, который регулярно доставлял любимому внуку гостинцы. Вот и в этот раз дрон, идя параллельным курсом с Карлсоном с такой же скоростью, вез пирожки, банки с вареньем, печенье, конфеты и пр. Карлсон начал поедание сладостей

сразу в полёте и для этого приспособил небольшой шланг, через который непрерывно поглощал малиновое варенье из банки. Скорость поступления варенья по шлангу составляет $\mu = 120$ г в минуту. В результате этого скорость движения Карлсона все время уменьшалась. График зависимости скорости движения Карлсона от его массы представлен на рисунке. Сумеет ли Карсон долететь до своего дома?

Расстояние от дома Карлсона до дома его бабушки по прямой составляет $d = 28$ км. Масса Карлсона, вышедшего от бабушки, равна $M_0 = 80$ кг. Скорость Карлсона, идущего по земле, не зависит от его массы и равна $U = 3$ км/ч. Построить график зависимости скорости Карлсона от времени. Сколько времени Карлсон будет добираться до дома?



Возможное решение:

Из графика зависимости скорости от массы делаем вывод, что скорость полета Карлсона линейно уменьшается с увеличением массы.

Так как варенье поступает равномерно, то масса Карлсона от времени будет меняться по линейному закону

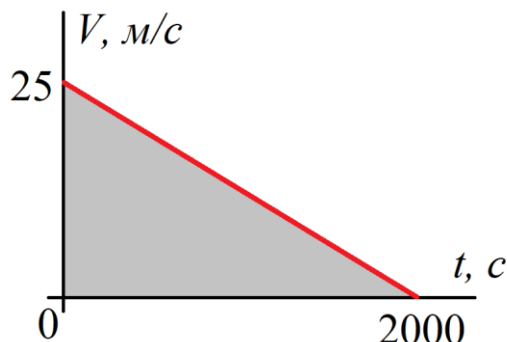
$$M(t) = M_0 + \mu t.$$

Следовательно, скорость с течением времени будет убывать также по линейному закону.

По графику $V(M)$ определим, что скорость станет равной нулю в тот момент времени, когда масса Карлсона станет равной 84 кг. К этому моменту времени Карлсон должен съесть 4 кг варенья. Для этого потребуется время Δt , равное

$$\Delta t = \frac{4000}{2} = 2000 \text{ с.}$$

Здесь мы учли то, что 120 грамм съеденного варенья в минуту, означает, что за 1 с съедается 2 г.



Построим график зависимости скорости Карлсона от времени (см. рис.). Участок движения с постоянной известной скоростью после приземления можно не рисовать. Путь S , который сумел пролететь непрерывно тяжелеющий Карлсон, равен площади отмеченного треугольника

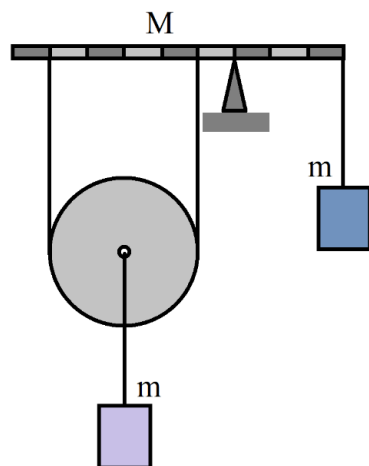
$$S = \frac{25 \cdot 2000}{2} = 25000 \text{ м} = 25 \text{ км.}$$

Так как расстояние от дома бабушки до дома Карлсона по прямой составляет $d = 28 \text{ км}$, а пролететь он сможет только 25 км, то оставшиеся 3 км ему придется идти пешком, затратив на это 1 час. Таким образом, время, за которое Карлсон доберётся в этот день до дома составит

$$T = 2000 + 3600 = 5600 \text{ с} = 93,3 \text{ мин} = 1 \text{ час } 33 \text{ мин.}$$

Критерии проверки:

№	Содержание критерия	Балл
1	Сделан обоснованный вывод о линейном характере зависимости скорости Карлсона от времени	3
2	Определено время полета Карлсона 120 г/мин = 2 г/с 2000 с	До 2 баллов 1 1
3	Определено расстояние, которое Карлсон сможет пролететь	2 балла
4	Сделан вывод (дан ответ), что не долетит	1 балл
5	Определено расстояние, которое нужно будет пройти пешком	1 балл
6	Найдено полное время движения	1 балл



3. Равновесие (10 баллов)

При какой массе M однородного рычага возможно равновесие системы, показанной на рисунке? Масса грузов равна m . Блок и нити невесомы.

Возможное решение:

Обозначим силу натяжения нитей, на которых подвешены грузы T_1 , силу натяжения нити, перекинутой через блок T_2 , силу реакции опоры N .

Сделаем рисунок, расставим силы, запишем условие равновесия грузов и рычага

$$T_1 = mg;$$

$$T_2 5a + T_2 a + Mg \frac{3}{2} a = T_1 3a.$$

Здесь a – расстояние между метками (длина рычага равна $9a$). Правило моментов для рычага записано относительно точки опоры.

Так как блок невесом, то

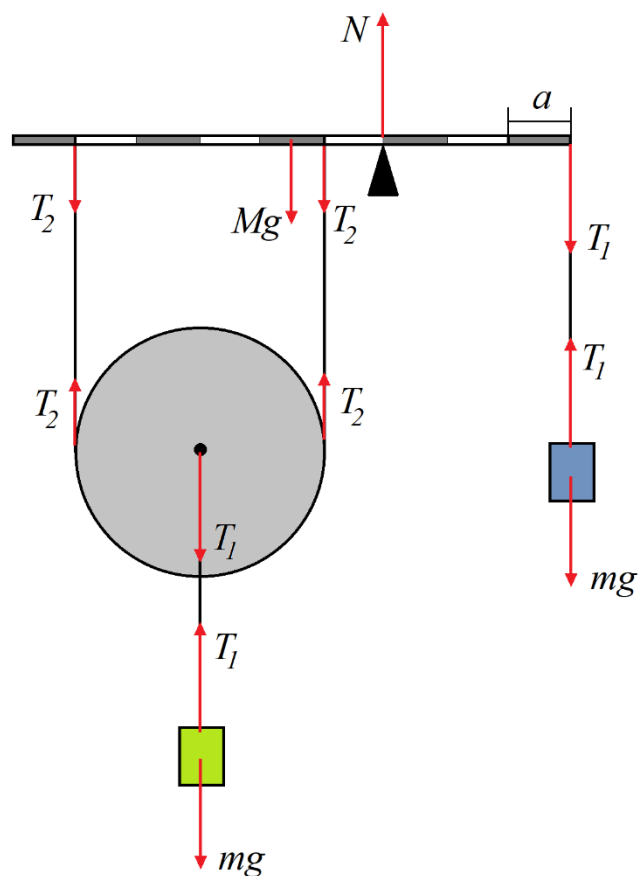
$$2T_2 = T_1.$$

Решая записанную систему уравнений, получим, что

$$M = 0.$$

Ответ: равновесие возможно при массе рычага, равной 0.

Критерии проверки:



№	Содержание критерия	Балл
1	Сделан рисунок, расставлены силы, действующие в системе	2
2	Уравнения, описывающие равновесие: <i>первый закон Ньютона для грузов</i> <i>правило моментов для рычага</i> <i>соотношение для сил натяжения нитей</i> <i>объяснение для соотношения между силами натяжения (блок невесом)</i>	До 5 баллов 1 2 1 1
3	Правильно проделаны математические преобразования	2 балла
4	Получен верный ответ	1 балл

4. Погружение

Длинный стержень массой m прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости k .

4.1. Определите величину растяжения пружины (рисунок справа)

Возможное решение:

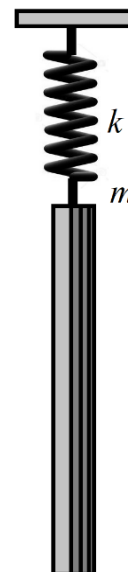
Сила упругости пружины $F_{упр}$ равна силе тяжести mg

$$F_{упр} = mg;$$

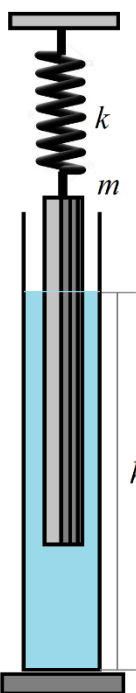
$$F_{упр} = k \cdot \Delta x.$$

Из записанных соотношений определяем величину растяжения пружины

$$\Delta x = \frac{mg}{k}.$$



Максимальный балл – 2 балла



4.2. Стержень вертикально погружают в цилиндр, заполненный водой. Определите величину деформации пружины x в зависимости от высоты h уровня жидкости в цилиндре (рисунок слева).

Объем воды в цилиндре равен V_0 , плотность воды $\rho_в$, площадь сечения цилиндра S .

Ускорение свободного падения g .

Возможное решение:

Пусть тело частично погружено в воду. На него действует сила тяжести mg (вниз), сила упругости пружины $F_{упр}$, сила Архимеда $F_{Арх}$ (вверх)

$$F_{упр} + F_{Арх} = mg.$$

Здесь сила упругости равна

$$F_{упр} = k \cdot x.$$

Сила Архимеда равна

$$F_{Арх} = \rho g V_{погруж},$$

где ρ – плотность воды, $V_{погруж}$ – объём тела, погруженный в воду.

Уровень жидкости в цилиндре равен

$$h = \frac{V_0 + V_{погруж}}{S}.$$

Из записанных соотношений выражаем величину деформации пружины x в зависимости от уровня жидкости в цилиндре h

$$x = -\frac{\rho g h S}{k} + \frac{mg}{k} + \frac{\rho g V_0}{k}.$$

Критерии проверки:

№	Содержание критерия	Балл
1	Определена величина деформации пружины в воздухе	2
2	Записано условие равновесия тела <i>определена сила Архимеда</i>	До 4 баллов 1

	<i>определена сила упругости записан первый закон Ньютона</i>	<i>1 2</i>
3	Записано выражение для уровня жидкости $h = \frac{V_0 + V_{\text{погруж}}}{S}$ либо аналогичное	3 балла
4	Математические преобразования	До 5 баллов
5	Получен правильный ответ	1 балл