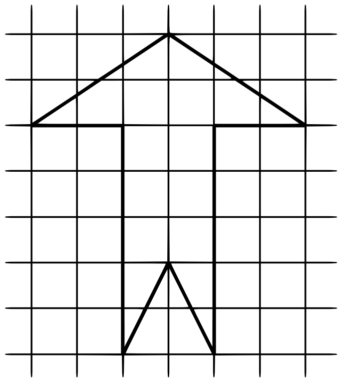
Вариант №1.

1. *(2 балла)* Вычислите: $(5,37-2,63)^2+2\cdot 5,37\cdot 5,26-54$.

2. *(2 балла)* Вычислите: $2^{n-1}\cdot 4^{n-2}:8^{n-3}$.



3. *(2 балла)* Найдите площадь указанной фигуры (все клетки являются квадратами со стороной 1).

4. *(2 балла)* Решите уравнение: $x-\dfrac{2x+1}{4}+\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1-x}{10}+1$.

5. *(2 балла)* 110 лицеистов писали экзамен по алгебре. Средний балл тех, кто успешно справился с работой, – 28 баллов, а тех, кто провалил испытания, – 8 баллов. Было подсчитано, что средний результат всех сдававших составил 22 балла. Каков процент учащихся от общего числа лицеистов, успешно сдавших экзамен?

6. *(3 балла)* Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=21$, $AC:BC=3:4$. Найдите AC.

7. *(2 балла)* На листе бумаги записано число 493742. Допишите между какими-то двумя его цифрами ещё ровно одну цифру так, чтобы полученное число делилось на 36. В ответе запишите полученное число.

8. *(2 балла)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} x-3y=1, \\ 6y-2x=2. \end{cases}$

9. *(2 балла)* Биссектриса внешнего угла $\angle BAD$ треугольника ABC пересекает биссектрису угла $\angle ACB$ в точке E так, что $\angle AEC=23^\circ$. Найдите угол $\angle ABC$.

10. *(3 балла)* Наблюдательная Алиса, строя графики функции $y=2-k+kx$ при различных значениях k, заметила, что все изображенные линии имеют общую точку. Найдите её координаты.

11. *(5 баллов)* Найдите все тройки (x,y,z) чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению

$$9x^2+y^2+z^2=12x-4y+2z-9.$$

12. *(5 баллов)* Упростите выражение: $\dfrac{a(a^2-b)-b^2(b-1)}{a^3-2b^3+2a^2b-ab^2}$.

13. *(6 баллов)* Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж четыре часа. Если бы первый чертёнок чертил вдвое быстрее, а второй – вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени. Если бы, наоборот, первый чертил вдвое медленнее, а второй – вдвое быстрее, то они управились бы за 2 ч 40 мин. За какое время начертили бы чертёж первые три чертёнка без помощи четвёртого?

14. *(6 баллов)* В треугольнике ABC: $\angle A=40^\circ$, $\angle B=20^\circ$, а $AB-BC=5$. Найдите длину биссектрисы угла C треугольника ABC.

15. *(6 баллов)* Постройте график функции $y=\dfrac{2x(4x^2-1)}{2x^2-x}$ и определите какие значения может принимать y.

1. Вычислите: $(5,37-2,63)^2+2\,\cdot\,5,37\,\cdot\,5,26-54$.

Решение

$$(5,37-2,63)^2+2\cdot 5,37\cdot 5,26-54=$$
$$=(5,37)^2-2\cdot 5,37\cdot 2,63+(2,63)^2+2\cdot 5,37\cdot 5,26-54=$$
$$=(5,37)^2+(2,63)^2+2\cdot\,5,37(5,26-2,63)-54=$$
$$=(5,37)^2+(2,63)^2+2\cdot 5,37\cdot 2,63-54=$$
$$=(5,37+2,63)^2-54=8^2-54=10.$$

Ответ: 10.

2. Вычислите: $2^{n-1}\cdot 4^{n-2}:8^{n-3}$.

Решение

$$2^{n-1}\cdot 4^{n-2}:8^{n-3}=2^{n-1}\cdot 2^{2n-4}:2^{3n-9}=2^{n-1+2n-4-3n+9}=2^4=16.$$

Ответ: 16.

3. Заметим, что из частей фигуры можно составить прямоугольник со сторонами 2 и 7, площадь которого равна 14.

Ответ: 14.

4. Решите уравнение: $x-\dfrac{2x+1}{4}+\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1-x}{10}+1$.

Решение

Домножим всё уравнение на 20.

$$20x-5(2x+1)+4(x+4)=5x-2(1-x)+20;$$
$$7x=7;$$
$$x=1.$$

Ответ: 1.

5. 110 лицеистов писали экзамен по алгебре. Средний балл тех, кто успешно справился с работой, – 28 баллов, а тех, кто провалил испытания, – 8 баллов. Было подсчитано, что средний результат всех сдававших составил 22 балла. Каков процент учащихся от общего числа лицеистов, успешно сдавших экзамен?

Решение

Пусть x лицеистов успешно справились с работой, тогда $110-x$ – провалили испытания. Сумма баллов лицеистов успешно справившихся с работой – $28x$, а проваливших испытание – $8(110-x)$. Сумма баллов всех лицеистов $22\cdot 110$. Получаем уравнение

$$28x+8(110-x)=22\cdot 110.$$

Откуда $x=77$ – количество лицеистов успешно справившихся с работой, что составляет 70% от общего количества лицеистов.

Ответ: 70.

6. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=21$, $AC:BC=3:4$. Найдите AC.

Решение

Если точка C лежит на отрезке AB, то, обозначив $AC=3x$, получаем, что $BC=4x$, а $AB=7x=21$. Откуда $x=3$ и $AC=9$.

Если точка C лежит на луче BA за точкой A, то, обозначив $AC=3x$, получаем, что $BC=4x$, а $AB=x=21$. Значит, $AC=63$.

Ответ: 9 или 63.

7. На листе бумаги записано число 493742. Допишите между какими-то двумя его цифрами ещё ровно одну цифру так, чтобы полученное число делилось на 36. В ответе запишите полученное число.

Решение

Для того, чтобы число делилось на 36 необходимо, чтобы оно делилось на 4 и на 9. Чтобы число делилось на 4 нужно, чтобы число составленное из двух последних цифр числа делилось на 4. Поскольку 42 не делится на 4, то новую цифру надо поставить между двумя последними цифрами. Для деления числа на 9 необходимо, чтобы сумма цифр числа делилась на 9. Сумма цифр исходного числа $4+9+3+7+4+2=29$. Чтобы сумма делилась на 9 требуется добавить к ней 7. Верный ответ – 4937472.

Ответ: 4937472.

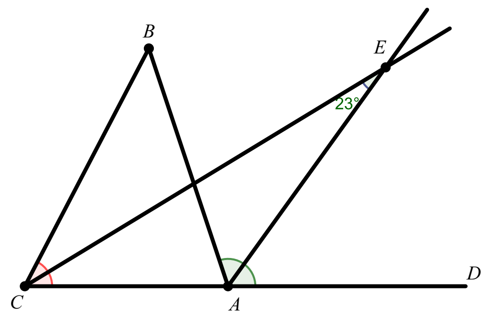
8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x-3y=1, \\ 6y-2x=2. \end{cases}$

Решение

Выразим переменную x из первого уравнения $x=3y+1$ и подставим во второе $6y-2(3y+1)=2$. Получаем, что $-2=2$, система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

9. Биссектриса внешнего угла $\angle BAD$ треугольника ABC пересекает биссектрису угла $\angle ACB$ в точке E так, что $\angle AEC=23°$. Найдите угол $\angle ABC$.



Решение

Обозначим половину угла $\angle BAD$ через α, а половину угла $\angle ACB$ через β. Угол $\angle EAD=\alpha$ является внешним углом для треугольника ACE, следовательно, по свойству внешнего угла
$\alpha=23°+\beta$, откуда $\alpha-\beta=23°$.

Угол $\angle BAD=2\alpha$ – внешний для треугольника ABC. По свойству внешнего угла $2\alpha=\angle ABC+2\beta$. Выражая искомый угол, получим $\angle ABC=2(\alpha-\beta)=2\cdot 23°=46°$.

Ответ: 46.

10. Наблюдательная Алиса, строя графики функции $y=2-k+kx$ при различных значениях k, заметила, что все изображенные линии имеют общую точку. Найдите ее координаты.

Решение

Заметим, что при $k=0$ получается прямая $y=2$, а при $k=2$ – прямая $y=2x$. Прямые пересекаются в точке с координатами (1;2).

Ответ: (1;2).

11. Найдите все тройки (x,y,z) чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению

$$9x^2+y^2+z^2=12x-4y+2z-9.$$

Решение

$$9x^2-12x+y^2+4y+z^2-2z+9=0$$
$$9x^2-12x+4+y^2+4y+4+z^2-2z+1=0$$
$$(3x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=0.$$

Сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Значит, $x=\dfrac{2}{3}$, $y=-2$, $z=1$.

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3};-2;1\right)$.

Критерии:

“5” – обоснованно получен верный ответ.

“3” – выделены полные квадраты, но задача не доведена до верного ответа.

12. Упростите выражение: $\dfrac{a(a^2-b)-b^2(b-1)}{a^3-2b^3+2a^2b-ab^2}$.

Решение

$$\frac{a(a^2-b)-b^2(b-1)}{a^3-2b^3+2a^2b-ab^2}=\frac{a^3-ab-b^3+b}{a^2(a+2b)-b^2(a+2b)}=$$
$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)-b(a-b)}{(a+2b)(a^2-b^2)}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2-b)}{(a+2b)(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab+b^2-b}{(a+2b)(a+b)}.$$

Критерии:

"5" – обоснованно получен верный ответ;

"+1" – в числителе верно применена формула разности кубов, выполнено разложение на множители;

"+1" – в знаменателе верно применена формула разности квадратов;

"+1" – выполнено разложение на множители в знаменателе (группировка).

13. *(6 баллов)* Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж четыре часа. Если бы первый чертёнок чертил вдвое быстрее, а второй – вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени. Если бы, наоборот, первый чертил вдвое медленнее, а второй – вдвое быстрее, то они управились бы за 2 ч 40 мин. За какое время начертили бы чертёж первые три чертёнка без помощи четвёртого?

Решение

Заметим, что часть работы, выполненная третьим и четвёртым чертятами не менялась.

Обозначим производительность 1 чертёнка за a, 2-го – за b. Выразим суммарную производительность 3-го и 4-го чертят, используя начальные условия, она равна $\dfrac{1}{4}-(a+b)$.

Запишем условия с изменением производительности 1-го и 2-го чертят:

$$\begin{cases} 2a+\dfrac{1}{2}b+\left(\dfrac{1}{4}-(a+b)\right)=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}a+2b+\left(\dfrac{1}{4}-(a+b)\right)=\dfrac{1}{2\frac{2}{3}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\dfrac{1}{2}b=0, \\ -\dfrac{1}{2}a+b=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Откуда: $a=\dfrac{1}{2}b$ или $b=2a$, подставим во второе уравнение

$$-\frac{1}{2}a+2a=\frac{1}{8}\qquad \frac{3}{2}a=\frac{1}{8}\qquad a=\frac{1}{12}\qquad b=2a=\frac{1}{6}.$$

Найдем производительность 3-го и 4-го чертят вместе $\dfrac{1}{4}-(a+b)=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{6}\right)=0$. Значит, 3-й и 4-й чертята бездельничали, а всю работу выполняли первые два. На это им потребовалось 4 часа.

Ответ: 4 часа.

Критерии:

"6" – обоснованно получен верный ответ;

"+1" – доказано, что 3 и 4 чертята ничего не делали;

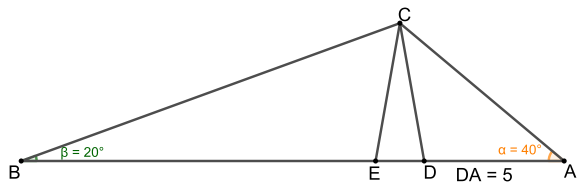
"+1" – доказано, что производительность второго чертенка в два раза больше первого.

"+1" – за каждую верно найденную производительность 1 и 2 чертят;

"+1" – верно составлена система уравнений.

14. *(6 баллов)* В треугольнике ABC: $\angle A = 40°$, $\angle B = 20°$, а $AB - BC = 5$. Найдите длину биссектрисы угла C треугольника ABC.

Решение



Отметим на стороне BA точку D такую, что $BD = BC$; тогда $DA = 5$. Треугольник $\triangle BDC$ – равнобедренный, значит $\angle BCD = \angle BDC = \frac{1}{2}(180^o - 20^o) = 80^o$. Тогда $\angle CDA = 180^o - 80^o = 100^o$, а угол $\angle ACD = 180^o - (40^o + 100^o) = 40^o$. Значит, треугольник $\triangle ADC$ – равнобедренный и $CD = DA = 5$.

Пусть CE – биссектриса угла $\angle ACB$, тогда $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180^o - (20^o + 40^o)) = 60^o$. Угол $\angle ECD = 60^o - 40^o = 20^o$, угол $\angle CED = 180^o - (20^o + 80^o) = 80^o$. Значит треугольник $\triangle CDE$ – равнобедренный и $CE = CD = 5$.

Ответ: 5.

Критерии:

“6” – обоснованно получен верный ответ;

“+2” – доказано, что $\triangle EDC$ – равнобедренный;

“+2” – доказано, что $\triangle ADC$ – равнобедренный.

15. *(6 баллов)* Постройте график функции $y = \dfrac{2x(4x^2-1)}{2x^2-x}$ и определите какие значения может принимать y.

Решение

Преобразуем выражение

$$y = \frac{2x(4x^2-1)}{2x^2-x} = \frac{2x(2x-1)(2x+1)}{x(2x-1)} = 2(2x+1), \text{ при } x \neq 0 \text{ и } x \neq \frac{1}{2}.$$

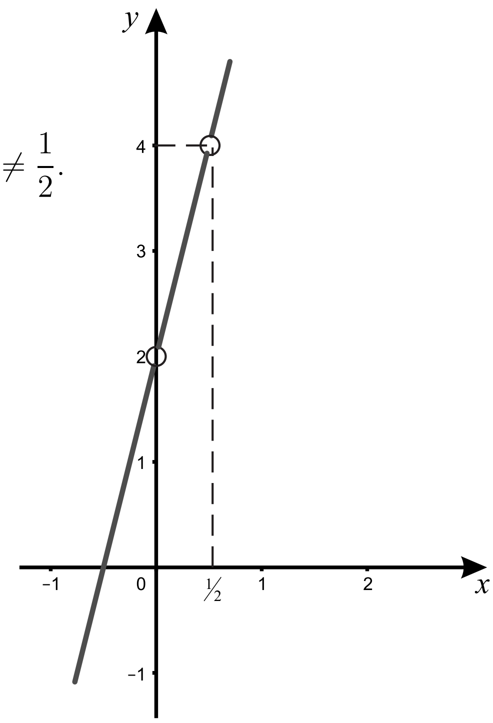


График функции изображен на рисунке. Множество значений, которые может принимать переменная $y \in \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$.

Критерии:

“6” – обоснованно получен верный ответ;

“+2” – построен график функции $y = 4x + 2$ с учетом выколотых точек;

“+1” – получено уравнение прямой $y = 2x + 6$ и построен график без учета выколотых точек;

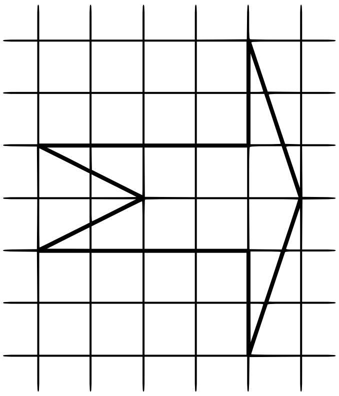
“+1” – дробь сокращена, учтено условие, что $x \neq 0$ и $x \neq \frac{1}{2}$;

“+1” – верно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя.

Вариант №2.

1. *(2 балла)* Вычислите: $(3,71+1,71)^2-2\cdot 3,71\cdot 3,42+6$.

2. *(2 балла)* Вычислите: $3^{n+2}\cdot 9^{n+2}:27^{n+1}$.



3. *(2 балла)* Найдите площадь указанной фигуры (все клетки являются квадратами со стороной 1).

4. *(2 балла)* Решите уравнение: $\dfrac{2x-5}{5}+\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{5-2x}{3}-\dfrac{6-7x}{4}-x$.

5. *(2 балла)* 140 лицеистов сдавали зачет по геометрии. Средний балл тех, кто успешно справился с работой, – 23 балла, а тех, кто провалил испытания, – 3 балла. Было подсчитано, что средний результат всех сдававших составил 15 баллов. Каков процент учащихся от общего числа лицеистов, успешно сдавших зачет?

6. *(3 балла)* Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=20$, $AC:BC=3:2$. Найдите BC.

7. *(2 балла)* Дано число 724326. Допишите между какими-то двумя его цифрами ещё ровно одну цифру так, чтобы полученное число делилось на 36. В ответе запишите полученное число.

8. *(2 балла)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ 9y-6x=3. \end{cases}$

9. *(2 балла)* Биссектриса внешнего угла $\angle ABD$ треугольника ABC пересекает биссектрису угла $\angle ACB$ в точке F так, что $\angle BFC=29^\circ$. Найдите угол $\angle BAC$.

10. *(3 балла)* Наблюдательная Катя, строя графики функции $y=1+k+kx$ при различных значениях k, заметила, что все изображенные линии имеют общую точку. Найдите ее координаты.

11. (5 баллов) Найдите все тройки (x,y,z) чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению

$$4x^2+y^2+4z^2=12x+2y-4z-11.$$

12. (5 баллов) Упростите выражение: $\dfrac{a^2(a-1)-b(a-b^2)}{2a^3+b^3-2ab^2-a^2b}$.

13. (6 баллов) Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж целых тринадцать часов. Если бы первый чертёнок чертил в четыре раза быстрее, а второй – в четыре раза медленнее, то им потребовалось бы столько же времени. Если бы, наоборот, первый чертил в четыре раза медленнее, а второй – в четыре раза быстрее, то они управились бы всего за четыре часа. За какое время начертили бы чертёж первые три чертёнка без помощи четвёртого?

14. (6 баллов) В треугольнике DEF: угол $\angle E=40^\circ$, $\angle F=20^\circ$, а $EF=DF+4$. Найдите длину биссектрисы угла D треугольника DEF.

15. (6 баллов) Постройте график функции $y=\dfrac{2x(x^2-9)}{x^2-3x}$ и определите какие значения может принимать y.

1. Вычислите: $(3,71+1,71)^2 - 2\,\cdot\,3,71\,\cdot\,3,42+6$.

Решение

$$\begin{aligned}(3,71+1,71)^2 - 2\,\cdot\,3,71\,\cdot\,3,42+6 = \\ = (3,71)^2+2\cdot 3,71\cdot 1,71+(1,71)^2-2\cdot 3,71\cdot 3,42+6 = \\ = (3,71)^2+(1,71)^2+2\cdot\,3,71(1,71-3,42)+6 = \\ = (3,71)^2+(1,71)^2-2\cdot 3,71\cdot 1,71+6 = \\ = (3,71-1,71)^2+6 = 2^2+6 = 10.\end{aligned}$$

Ответ: 10.

2. Вычислите: $3^{n+2}\cdot 9^{n+2} : 27^{n+1}$.

Решение

$$3^{n+2}\cdot 9^{n+2} : 27^{n+1} = 3^{n+2}\cdot 3^{2n+4} : 3^{3n+3} = 2^{n+2+2n+4-3n-3} = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

3. Необходимо заметить, что из частей фигуры можно составить квадрат со стороной 3, площадь которого равна 9.

Ответ: 9.

4. Решите уравнение: $\dfrac{2x-5}{5}+\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{5-2x}{3}-\dfrac{6-7x}{4}-x$.

Решение

Домножим всё уравнение на 60.

$$\begin{gathered}12(2x-5)+15(x+2)+6 = 20(5-2x)-15(6-7x)-60x;\\ 34x = 34;\\ x = 1.\end{gathered}$$

Ответ: 1.

5. 140 лицеистов сдавали зачет по геометрии. Средний балл тех, кто успешно справился с работой, – 23 балла, а тех, кто провалил испытания, – 3 балла. Было подсчитано, что средний результат всех сдававших составил 15 баллов. Каков процент учащихся от общего числа лицеистов, успешно сдавших зачет?

Решение

Пусть x лицеистов успешно справились с работой, тогда $140-x$ – провалили испытания. Сумма баллов лицеистов успешно справившихся с работой – $23x$, а проваливших испытание – $3(140-x)$. Сумма баллов всех лицеистов $15\cdot 140$. Получаем уравнение

$$23x+3(140-x) = 15\cdot 140.$$

Откуда $x = 84$ – количество лицеистов успешно справившихся с работой, что составляет 70% от общего количества лицеистов.

Ответ: 60.

6. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 20$, $AC : BC = 3:2$. Найдите BC.

Решение

Если точка C лежит на отрезке AB, то, обозначив $AC = 3x$, получаем, что $BC = 2x$, а $AB = 5x = 20$. Откуда $x = 4$ и $AC = 8$.

Если точка C лежит на луче AB за точкой A, то, обозначив $AC = 3x$, получаем, что $BC = 2x$, а $AB = x = 20$. Значит, $AC = 40$.

Ответ: 8 или 40.

7. Дано число 724326. Допишите между какими-то двумя его цифрами ещё ровно одну цифру так, чтобы полученное число делилось на 36. В ответе запишите полученное число.

Решение

Для того, чтобы число делилось на 36 нужно, чтобы оно делилось на 4 и на 9. Для деления на 4 необходимо, чтобы число составленное из двух последних цифр делилось на 4. Поскольку 26 не делится на 4, новую цифру надо поставить между двумя последними цифрами. Чтобы число делилось на 9 необходимо, чтобы сумма цифр числа делилась на 9. Сумма цифр исходного числа $7+2+4+3+2+6=24$, к ней требуется добавить 3, чтобы число делилось на 9. Верный ответ 7243236.

Ответ: 7243236.

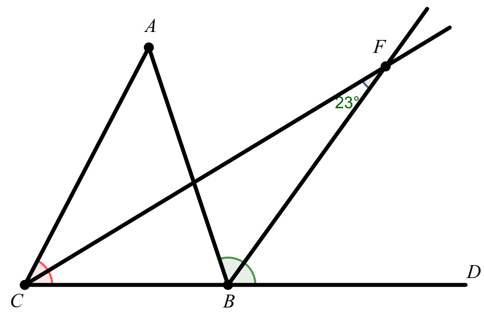
8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ 9y-6x=3. \end{cases}$

Решение

Выразим из первого уравнения $2x=3y+1$ и подставим во второе $9y-3(3y+1)=3$. Получаем, что $-3=3$, значит система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

9. Биссектриса внешнего угла $\angle ABD$ треугольника ABC пересекает биссектрису угла $\angle ACB$ в точке F так, что $\angle BFC=29°$. Найдите угол $\angle BAC$.



Решение

Обозначим половину угла $\angle ABD$ через α, а половину угла $\angle ACB$ через β. Угол $\angle FBD=\alpha$ является внешним углом для треугольника ABF, следовательно, по свойству внешнего угла
$\alpha=29°+\beta$, откуда $\alpha-\beta=29°$.

Угол $\angle ABD=2\alpha$ – внешний для треугольника ABC. По свойству внешнего угла $2\alpha=\angle BAC+2\beta$. Выражая искомый угол, получим $\angle BAC=2(\alpha-\beta)=2\cdot 29°=58°$.

Ответ: 58.

10. Наблюдательная Катя, строя графики функции $y=1+k+kx$ при различных значениях k, заметила, что все изображенные линии имеют общую точку. Найдите её координаты.

Решение

Заметим, что при $k=0$ получается прямая $y=1$, а при $k=-1$ – прямая $y=-x$, которая пересекается с $y=1$ в точке с координатами (-1;1).

Ответ: (-1;1).

11. Найдите все тройки (x,y,z) чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению

$$4x^2+y^2+4z^2=12x+2y-4z-11.$$

Решение

$$4x^2+y^2+4z^2-12x-2y+4z+11=0$$
$$4x^2-12x+9+y^2-2y+1+4z^2+4z+1=0$$
$$(2x-3)^2+(y-1)^2+(2z+1)^2=0.$$

Сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Значит, $x=\dfrac{3}{2}$, $y=1$, $z=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Критерии:

“5” – обоснованно получен верный ответ.

“3” – выделены полные квадраты, но задача не доведена до верного ответа.

12. Упростите выражение $\dfrac{a^2(a-1)-b(a-b^2)}{2a^3+b^3-2ab^2-a^2b}$.

Решение

$$\frac{a^2(a-1)-b(a-b^2)}{2a^3+b^3-2ab^2-a^2b}=\frac{a^3-a^2-ab+b^3}{a^2(2a-b)-b^2(2a-b)}=$$
$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-a(a+b)}{(2a-b)(a^2-b^2)}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2-a)}{(2a-b)(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2-a}{(2a-b)(a-b)}.$$

Критерии:

"5" – обоснованно получен верный ответ;

"+1" – в числителе верно применена формула суммы кубов, выполнено разложение на множители;

"+1" – в знаменателе верно применена формула разности квадратов;

"+1" – выполнено разложение на множители в знаменателе (группировка).

13. *(6 баллов)* Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж целых тринадцать часов. Если бы первый чертёнок чертил в четыре раза быстрее, а второй – в четыре раза медленнее, то им потребовалось бы столько же времени. Если бы, наоборот, первый чертил в четыре раза медленнее, а второй – в четыре раза быстрее, то они управились бы всего за четыре часа. За какое время начертили бы чертёж первые три чертенка без помощи четвёртого?

Решение

Заметим, что часть работы, выполненная третьим и четвертым чертятами не менялась.

Обозначим производительность 1 чертёнка за a, 2-го – за b. Выразим суммарную производительность 3-го и 4-го чертят, используя начальные условия, она равна $\dfrac{1}{13}-(a+b)$.

Запишем условия с изменением производительности 1-го и 2-го чертят:

$$\begin{cases} 4a+\dfrac{1}{4}b+\left(\dfrac{1}{13}-(a+b)\right)=\dfrac{1}{13}, \\ \dfrac{1}{4}a+4b+\left(\dfrac{1}{13}-(a+b)\right)=\dfrac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-\dfrac{3}{4}b=0, \\ -\dfrac{3}{4}a+3b=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{13}=\dfrac{9}{52}. \end{cases}$$

Откуда: $3a=\dfrac{3}{4}b$ или $b=4a$, подставим во второе уравнение

$$-\frac{3}{4}a+12a=\frac{9}{52}\qquad \frac{45}{4}a=\frac{9}{52}\qquad a=\frac{1}{65}\qquad b=4a=\frac{4}{65}.$$

Найдем производительность 3-го и 4-го чертят вместе $\dfrac{1}{13}-(a+b)=\dfrac{1}{13}-\left(\dfrac{1}{165}+\dfrac{4}{65}\right)=0$. Значит, 3-й и 4-й чертята бездельничали, а всю работу выполняли первые два. На это им потребовалось 13 часов.

Ответ: 13 часов.

Критерии:

"6" – обоснованно получен верный ответ;

"+1" – доказано, что 3 и 4 чертята ничего не делали;

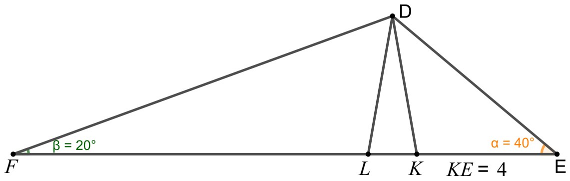
"+1" – доказано, что производительность второго чертенка в четыре раза больше первого.

"+1" – за каждую верно найденную производительность 1 и 2 чертят;

"+1" – верно составлена система уравнений.

14. *(6 баллов)* В треугольнике DEF: угол $\angle E = 40°$, $\angle F = 20°$, а $EF = DF + 4$. Найдите длину биссектрисы угла D треугольника DEF.

Решение



Отметим на стороне FE точку K такую, что $FK = FD$; тогда $KE = 4$. Треугольник $\triangle FDK$ – равнобедренный, значит $\angle FDK = \angle FKD = \frac{1}{2}(180^o - 20^o) = 80^o$. Тогда $\angle EKD = 180^o - 80^o = 100^o$, а угол $\angle EDK = 180^o - (40^o + 100^o) = 40^o$. Значит, треугольник $\triangle EKD$ – равнобедренный и $KE = KD = 4$.

Пусть DL – биссектриса угла $\angle FDE$, тогда $\angle EDL = \frac{1}{2}\angle FDE = \frac{1}{2}(180^o - (20^o + 40^o)) = 60^o$. Угол $\angle LDK = 60^o - 40^o = 20^o$, угол $\angle DLK = 180^o - (20^o + 80^o) = 80^o$. Значит треугольник $\triangle LDK$ – равнобедренный и $DL = DL = 4$.

Ответ: 4.

Критерии:

“6” – обоснованно получен верный ответ;

“+2” – доказано, что $\triangle DKE$ – равнобедренный;

“+2” – доказано, что $\triangle LDK$ – равнобедренный.

15. *(6 баллов)* Постройте график функции $y = \dfrac{2x(x^2-9)}{x^2-3x}$ и определите какие значения может принимать y.

Решение

Преобразуем выражение

$$y = \frac{2x(x^2-9)}{x^2-3x} = \frac{2x(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = 2(x+3), \text{ при } x \neq 0 \text{ и } x \neq 3.$$

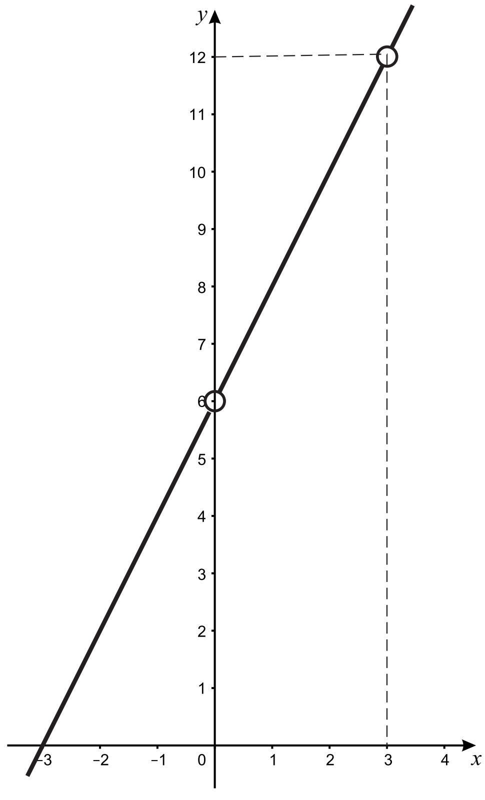


График функции изображен на рисунке. Множество значений, которые может принимать переменная $y \in \mathbb{R} \setminus \{6; 12\}$.

Критерии:

“6” – обоснованно получен верный ответ;

“+2” – построен график функции $y = 2x + 6$ с учетом выколотых точек;

“+1” – получено уравнение прямой $y = 2x + 6$ и построен график без учета выколотых точек;

“+1” – дробь сокращена, учтено условие, что $x \neq 0$ и $x \neq 3$;

“+1” – верно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя.