Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 (физ-мат, мат-инф, хим-био) класс
24 апреля 2022г.
1 вариант

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^3+3a^2b+3b^2a+b^3}{a+b}-a^2-b^2\right):\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b-a}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right).$$

2. Найдите последнюю цифру числа $9^{2022}+1$.

3. Среднее арифметическое двух натуральных чисел на 30% меньше большего из этих чисел. На сколько процентов среднее арифметическое этих чисел больше меньшего числа?

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH длиной 4, при этом AH равна 2. Найдите гипотенузу.

5. Вычислите $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}+\dfrac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}-\dfrac{10}{\sqrt{19}+3}$.

6. В треугольнике ABC угол B – тупой. Продолжения высот пересекаются в точке O так, что $\angle BOA=\angle BAO$, $\angle BOC=\angle BCO$. Найдите $\angle BCA$.

7. Сколько целых решений имеет неравенство $(|x-2|-3)(x^2+8x+16)\leqslant 0$?

8. Все натуральные делители натурального числа M выписаны по возрастанию. Известно, что произведение третьего и седьмого чисел в этом ряду равно M. Сколько делителей у числа M?

9. По прямолинейному шоссе ехал автобус со скоростью 70 км/ч. По пути он догнал тучу, двигающуюся в том же направлении и попал под дождь. Встречный автобус двигался тоже со скоростью 70 км/ч и был под дождем в 3 раза меньше времени, чем первый. С какой скоростью двигалась туча?

10. Найдите такие значения x, при которых определена функция $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}-\sqrt{-x}$.

11. а) Построить график функции $y=\sqrt{25-10x^2+x^4}$.

б) При каких значениях a прямая $y=a$ имеет с данным графиком ровно две точки пересечения?

12. Дано уравнение $x^2+bx-c=0$. Известно, что $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}$. При каком наименьшем натуральном значении c корни уравнения будут целыми? Найдите при этом с все корни.

13. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 32. Точки M и K середины сторон AB и AD соответственно. Найти площадь четырехугольника $AMOK$, где O – точка пересечения MD и BK.

14. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ x-y=16.\end{cases}$$

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^3+3a^2b+3b^2a+b^3}{a+b}-a^2-b^2\right):\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b-a}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right).$$

Решение

$$\left(\frac{a^3+3a^2b+3b^2a+b^3}{a+b}-a^2-b^2\right):\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b-a}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=$$
$$\left(\frac{(a+b)^3}{a+b}-a^2-b^2\right):\frac{a(a-b)-b(a+b)+2ab}{(a+b)(a-b)}=\left((a+b)^2-a^2-b^2\right):\frac{a^2-b^2}{(a+b)(a-b)}=2ab.$$

Ответ: $2ab$.

2. Найдите последнюю цифру числа $9^{2022}+1$.

Решение Последняя цифра числа $9^1=9$ – это 9, числа $9^2=81$ – это 1, числа $9^3=729$ – это 9 и т.д. Можно сделать вывод, что степень числа 9 с четным показателем всегда оканчивается на 1, а с нечетным на 9. Показатель 2022 чётное число, поэтому последняя цифра числа 9^{2022} это 1. Значит число $9^{2022}+1$ оканчивается цифрой 2.

Ответ: 2.

3. Среднее арифметическое двух натуральных чисел на 30% меньше большего из этих чисел. На сколько процентов среднее арифметическое этих чисел больше меньшего числа?

Решение Пусть a и b – натуральные числа и $a>b$. Среднее арифметическое на 30% меньше a, значит составляет 70 % от числа a. Получаем $\frac{a+b}{2}=0,7a$; $a+b=1,4a$ и $b=0{,}4\ a$.

Нужно узнать на сколько процентов $\frac{a+b}{2}$ больше b . Пусть b – 100 %, а $\frac{a+b}{2}-x$ %. Получаем $0,4a-100\%$, $0,7a-x\%$, значит $x=\frac{0{,}7a\cdot 100}{0{,}4a}$ и $x=175$ %, что на 75 % больше числа b.

Ответ: 75%.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH длиной 4, при этом AH равна 2. Найдите гипотенузу.

Решение

Пусть $HB=x$. Знаем, что квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой из прямого угла равен произведению отрезков гипотенузы. Получаем $4^2=2x$, т.е. $x=8$.

$$AB=AH+HB=2+8=10.$$

Ответ: 10.

5. Вычислите $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}+\dfrac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}-\dfrac{10}{\sqrt{19}+3}$.

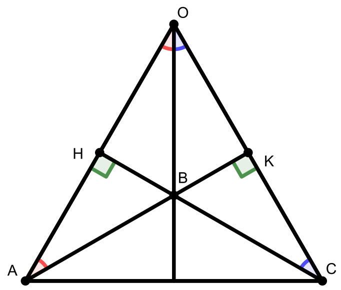
Решение

Избавимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби

$$\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{\left(4+\sqrt{11}\right)\left(4-\sqrt{11}\right)}+\frac{8\left(\sqrt{19}+\sqrt{11}\right)}{\left(\sqrt{19}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{11}\right)}-\frac{10\left(\sqrt{19}-3\right)}{\left(\sqrt{19}+3\right)\left(\sqrt{19}-3\right)}=$$
$$=\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{4^2-11}+\frac{8\left(\sqrt{19}+\sqrt{11}\right)}{19-11}-\frac{10\left(\sqrt{19}-3\right)}{19-9}=4-\sqrt{11}+\sqrt{19}+\sqrt{11}-\sqrt{19}+3=7.$$

Ответ: 7.

6. В треугольнике ABC угол B – тупой. Продолжения высот пересекаются в точке O так, что $\angle BOA = \angle BAO$, $\angle BOC = \angle BCO$. Найдите $\angle BCA$.



Решение

В треугольнике AOB $\angle BOA = \angle BAO$, значит треугольник равнобедренный, т.е. BH является высотой и медианой. Поэтому и CH – высота и медиана, значит треугольник AOC тоже равнобедренный и $AC = CO$. Аналогично в треугольнике OBC BK – высота и медиана, т.е. AK – высота и медиана треугольника AOC, значит $AC = AO$.

Получаем $AC = CO = AO$ и треугольник AOC равносторонний с углом 60^o. Высота CH является биссектрисой, значит $\angle BCA = 30^o$.

Ответ: 30^o.

7. Сколько целых решений имеет неравенство $(|x-2|-3)(x^2+8x+16) \leqslant 0$?

Решение

$$(|x-2|-3)(x^2+8x+16) \leqslant 0 \Leftrightarrow (|x-2|-3)(x+4)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |x-2|-3 \leqslant 0, & (1) \\ (x+4)^2 = 0; & (2) \end{array} \right.$$

(1) $|x-2|-3 \leqslant 0 \Leftrightarrow |x-2| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x-2 \leqslant 3 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 5$.

(2) $(x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Целые решения: $-4, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$, их количество равно 8.

Ответ: 8.

8. Все натуральные делители натурального числа M выписаны по возрастанию. Известно, что произведение третьего и седьмого чисел в этом ряду равно M. Сколько делителей у числа M?

Решение

Пусть у числа M делители $a_1 = 1; a_2; a_3; \ldots$ расположены в ряд по возрастанию. Если $a_3 \cdot a_7 = M$, то $a_2 \cdot a_8 = M$ и $a_1 \cdot a_9 = M$. Значит у числа M девять делителей.

Ответ: 9.

9. По прямолинейному шоссе ехал автобус со скоростью 70 км/ч. По пути он догнал тучу, двигающуюся в том же направлении и попал под дождь. Встречный автобус двигался тоже со скоростью 70 км/ч и был под дождем в 3 раза меньше времени, чем первый. С какой скоростью двигалась туча?

Решение

Пусть туча движется со скоростью x км/ч и длина тучи S км. Получаем, что скорость одного автобуса относительно тучи $70 + x$ км/ч, а другого $70 - x$ км/ч. Время нахождения под дождем $\frac{S}{70+x}$ и $\frac{S}{70-x}$, одно из этих чисел в 3 раза меньше другого. Запишем уравнение

$$\frac{S}{70-x} = 3\frac{S}{70+x}, \quad 70 + x = 3(70 - x), \quad 4x = 140, \quad x = 35.$$

Ответ: 35 км/ч.

10. Найдите такие значения x, при которых определена функция $y = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} - \sqrt{-x}$.

Решение Функция существует при условии

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{x+2}{x+1} \geqslant 0, & (1) \\ -x \geqslant 0; & (2) \end{array} \right.$$

(1) $\left\{ \begin{array}{l} x+2 \geqslant 0, \\ x+1 > 0, \end{array} \right.$ или $\left\{ \begin{array}{l} x+2 \leqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{array} \right.$

Откуда получаем, что $\left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2, \\ x > -1, \end{array} \right.$ или $\left\{ \begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x < -1. \end{array} \right.$ Т.е. $x \leqslant -2$ или $x > -1$.

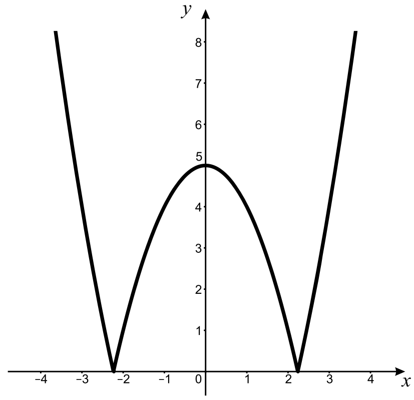
(2) $-x \geqslant 0 => x \leqslant 0$.

Возвращаясь к исходной системе $\begin{cases} x \leqslant -2, \ x > -1, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$

Ответ: $x \ \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0]$.

11. а) Построить график функции $y = \sqrt{25 - 10x^2 + x^4}$.

б) При каких значениях a прямая $y = a$ имеет с данным графиком ровно две точки пересечения?



Решение

а) Заметим, что $25-10x^2+x^4 = (5-x^2)^2$. Тогда $y = \sqrt{(5-x^2)^2} = |5-x^2|$. Построим график функции $y = |5-x^2|$.

б) Заметим, что прямая и график функций имеют две общие точки когда y = a совпадает с осью Ox или расположена выше точки $(0; 5)$, т.е. при $a = 0$ или $a > 5$.

Ответ: $a = 0$ или $a > 5$.

Критерии:

"2" – построен график функции $y = 5 - x^2$ (или $y = x^2 - 5$) (1б) и найдены значения параметра $a < 5$ (или $a > -5$) (1б).

"3" – построен график функции $y = |5 - x^2|$.

"+1" – найдены значения параметра $a > 5$.

"+1" – найдено значение параметра $a = 0$.

12. Дано уравнение $x^2 + bx - c = 0$. Известно, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$. При каком наименьшем натуральном значении c корни уравнения будут целыми? Найдите при этом с все корни.

Решение

Известно, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$. Откуда $\dfrac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{1}{2}$. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1 \cdot x_2 = -c. \end{cases}$$

Значит, $\dfrac{-b}{-c} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $c = 2b$.

Получим уравнение $x^2 + bx - 2b = 0$. Корни уравнения существуют при $D \geqslant 0$, т.е. $b^2 + 8b \geqslant 0$, неравенство верно при $b \leqslant -8$, $b \geqslant 0$. Т.к. $c = 2b \in N$, то числа $b \leqslant -8$ не подходят. Пусть $b = 1$, тогда $D = 9$, $c = 2$. Уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет целые корни 1 и -2. С увеличением b число c увеличивается, значит наименьшее с удовлетворяющее требованию равно 2.

Ответ: $c = 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Критерии:

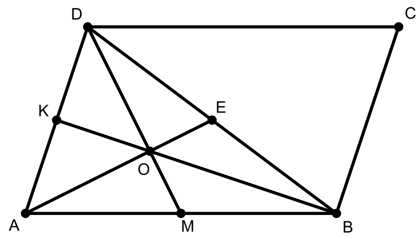
"+1" – применена теорема Виета.

"+1" – получено соотношение с = $2b$.

"2" – найдено верное значение c, обоснована его минимальность.

"+1" – верно найдены корни квадратного уравнения, удовлетворяющие условию задачи.

13. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 32. Точки M и K середины сторон AB и AD соответственно. Найти площадь четырехугольника $AMOK$, где O – точка пересечения MD и BK.



Решение

Поскольку OM – медиана треугольника ABO, используя свойства медианы, получаем, что $S_{AMO} = S_{MOB} = S_1$. Аналогично в треугольниках BOD и AOD: OE и OK медианы, поэтому $S_{DEO} = S_{EOB} = S_2$, $S_{DKO} = S_{AOK} = S_3$.

Поскольку BK – медиана треугольника ABD, то $S_{DKB} = S_{ABK}$. Эти площади можно записать как суммы площадей $2S_1 + S_3 = 2S_2 + S_3$, тогда получаем $S_1 = S_2$. Аналогично из равенства $S_{AMD} = S_{MDB}$ получим, что $S_3 = S_2$. Таким образом треугольник ABD разбит на шесть равновеликих треугольников.

$S_{ABD} = \frac{1}{2}\ S_{ABCD} = 16$. $S_{AOK} = \frac{1}{6}\ S_{ABD} = \frac{16}{6}$. Четырехугольник $AMOK$ состоит из двух треугольников, поэтому $S_{AMOK} = 2 \cdot \frac{16}{6} = \frac{16}{3}$.

Ответ: $S_{AMOK} = \frac{16}{3}$.

Критерии:

“1” – использовано свойство медианы.

“4” – доказано, что 6 треугольников равновелики или использовано свойство трёх медиан.

“+1” – обоснованно найдена площадь $\triangle\ ABD$.

“+1” – обоснованно найдена площадь $AMOK$.

14. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\sqrt{x} = a \geqslant 0$, $\sqrt{y} = b \geqslant 0$; тогда $x = a^2$, $y = b^2$. Получаем систему

$$\begin{cases} a + b = 8, \\ a^2 - b^2 = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 8, \\ (a+b)(a-b) = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 8, \\ 8(a-b) = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 8, \\ a - b = 2. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы получим, что $a = 5$, тогда $b = 3$. Выполним обратную замену, тогда $x = a^2 = 25$, $y = b^2 = 9$.

Ответ: $(25; 9)$.

Критерии:

“1” – замена *или* система сведена к иррациональному уравнению.

“3” – решена система с новыми переменными *или* решено иррациональное уравнение.

“4” – обоснованно получено верное решение системы.

“-1” – за неравносильные переходы без проверки.

Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 (физ-мат, мат-инф, хим-био) класс
24 апреля 2022г.
2 вариант

1. Упростите выражение

$$\left(x^2+y^2-\frac{x^3-3x^2y+3y^2x-y^3}{x-y}\right):\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y-x}+\frac{2xy}{x^2-y^2}\right).$$

2. Найдите последнюю цифру числа $4^{2022}+1$.

3. Среднее арифметическое двух натуральных чисел на 40% меньше большего из этих чисел. На сколько процентов среднее арифметическое этих чисел больше меньшего числа?

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH длиной 6, при этом AH равна 4. Найдите гипотенузу.

5. Вычислите $\dfrac{6}{\sqrt{17}-\sqrt{11}}+\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}-\dfrac{8}{\sqrt{17}+3}$.

6. В треугольнике ABC угол B – тупой. Продолжения высот пересекаются в точке H так, что $\angle BHA=\angle BAH$, $\angle BHC=\angle BCH$. Найдите $\angle ABC$.

7. Сколько целых решений имеет неравенство $(|x-1|-2)\,(x^2-8x+16)\leqslant 0$?

8. Все натуральные делители натурального числа N выписаны по возрастанию. Известно, что произведение второго и восьмого чисел в этом ряду равно N. Сколько делителей у числа N?

9. По прямолинейному шоссе ехал автомобиль. По пути он догнал тучу, двигающуюся в том же направлении со скоростью 30 км/ч и попал под дождь. Встречный автомобиль двигался с той же со скоростью, что и первый и был под дождем в 2 раза меньше времени, чем первый. С какой скоростью двигались автомобили?

10. Найдите такие значения x, при которых определена функция $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}}+\sqrt{-x}$.

11. а) Построить график функции $y=\sqrt{16-8x^2+x^4}$.

б) При каких значениях a прямая $y=a$ имеет с данным графиком ровно две точки пересечения?

12. Дано уравнение $x^2-bx+c=0$. Известно, что $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}$. При каком наибольшем целом отрицательном значении c корни уравнения будут целыми? Найдите при этом с все корни.

13. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки M и K середины сторон BC и CD соответственно. Пусть O – точка пересечения MD и BK. Площадь четырехугольника $CMOK$ равна 4. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

14. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ x-y=5.\end{cases}$$

1. Упростите выражение

$$\left(x^2+y^2-\frac{x^3-3x^2y+3y^2x-y^3}{x-y}\right):\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y-x}+\frac{2xy}{x^2-y^2}\right).$$

Решение

$$\left(x^2+y^2-\frac{x^3-3x^2y+3y^2x-y^3}{x-y}\right):\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y-x}+\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)=$$
$$\left(x^2+y^2-\frac{(x-y)^3}{x-y}\right):\frac{x(x-y)-y(x+y)+2xy}{(x+y)(x-y)}=\left(x^2+y^2-(x-y)^2\right):\frac{x^2-y^2}{(x+y)(x-y)}=2xy.$$

Ответ: $2xy$.

2. Найдите последнюю цифру числа $4^{2022}+1$.

Решение Последняя цифра числа $4^1=4$ – это 4, числа $4^2=16$ – это 6, числа $4^3=64$ – это 4 и т.д. Можно сделать вывод, что степень числа 4 с чётным показателем всегда оканчивается на 6, а с нечётным на 4. Показатель 2022 чётное число, поэтому последняя цифра числа 4^{2022} это 6. Значит число $4^{2022}+1$ оканчивается цифрой 7.

Ответ: 7.

3. Среднее арифметическое двух натуральных чисел на 40% меньше большего из этих чисел. На сколько процентов среднее арифметическое этих чисел больше меньшего числа?

Решение Пусть a и b – натуральные числа и $a>b$. Среднее арифметическое на 40% меньше a, значит составляет 60 % от числа a. Получаем $\frac{a+b}{2}=0,6a$; $a+b=1,2a$ и $b=0{,}2\ a$.

Нужно узнать на сколько процентов $\frac{a+b}{2}$ больше b. Пусть b – 100 %, а $\frac{a+b}{2}-x$ %. Получаем $0,2a-100\%$, $0,6a-x\%$, значит $x=\frac{0{,}6a\cdot 100}{0{,}2a}$ и $x=300$ %, что на 200 % больше числа b.

Ответ: 200%.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH длиной 6, при этом AH равна 4. Найдите гипотенузу.

Решение

Пусть $HB=x$. Знаем, что квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой из прямого угла равен произведению отрезков гипотенузы. Получаем $6^2=4x$, т.е. $x=9$.

$$AB=AH+HB=4+9=13.$$

Ответ: 13.

5. Вычислите $\dfrac{6}{\sqrt{17}-\sqrt{11}}+\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}-\dfrac{8}{\sqrt{17}+3}$.

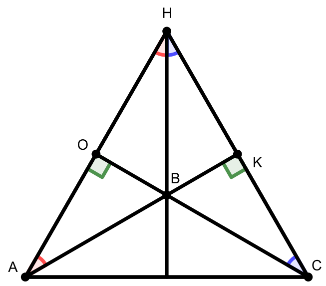
Решение

Избавимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби

$$\frac{6(\sqrt{17}+\sqrt{11})}{(\sqrt{17}-\sqrt{11})(\sqrt{17}+\sqrt{11})}+\frac{5(4-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{11})(4-\sqrt{11})}-\frac{8(\sqrt{17}-3)}{(\sqrt{17}+3)(\sqrt{17}-3)}=$$
$$=\frac{6(\sqrt{17}+\sqrt{11})}{17-11}+\frac{5(4-\sqrt{11})}{4^2-11}-\frac{8(\sqrt{17}-3)}{17-3^2}=\sqrt{17}+\sqrt{11}+4-\sqrt{11}-\sqrt{17}+3=7.$$

Ответ: 7.

6. В треугольнике ABC угол B – тупой. Продолжения высот пересекаются в точке H так, что $\angle BHA = \angle BAH$, $\angle BHC = \angle BCH$. Найдите $\angle ABC$.



Решение

В треугольнике ABH $\angle BAH = \angle BHA$, значит треугольник равнобедренный, т.е. BO является высотой и медианой. Поэтому и CO – высота и медиана, значит треугольник AHC тоже равнобедренный и $AC = CH$. Аналогично в треугольнике HBC BK – высота и медиана, т.е. AK – высота и медиана треугольника AHC, значит $AC = AH$.

Получаем $AC = CH = AH$ и треугольник AHC равносторонний, откуда $\angle ABC = 120^o$.

Ответ: 120^o.

7. Сколько целых решений имеет неравенство $(|x-1|-2)(x^2-8x+16) \leqslant 0$?

Решение

$$(|x-1|-2)(x^2-8x+16) \leqslant 0 \Leftrightarrow (|x-1|-2)(x-4)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |x-1|-2 \leqslant 0, & (1) \\ (x-4)^2 = 0; & (2) \end{array} \right.$$

(1) $|x-1|-2 \leqslant 0 \Leftrightarrow |x-1| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x-1 \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3$.

(2) $(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Целые решения: $-1, 0, 1, 2, 3, 4$, их количество равно 6.

Ответ: 6.

8. Все натуральные делители натурального числа N выписаны по возрастанию. Известно, что произведение второго и восьмого чисел в этом ряду равно N. Сколько делителей у числа N?

Решение

Пусть у числа N делители $a_1 = 1; a_2; a_3; \ldots$ расположены в ряд по возрастанию. Если $a_2 \cdot a_8 = N$, то $a_1 \cdot a_9 = N$. Значит у числа N девять делителей.

Ответ: 9.

9. По прямолинейному шоссе ехал автомобиль. По пути он догнал тучу, двигающуюся в том же направлении со скоростью 30 км/ч и попал под дождь. Встречный автомобиль двигался с той же со скоростью, что и первый и был под дождем в 2 раза меньше времени, чем первый. С какой скоростью двигались автомобили?

Решение

Пусть автомобиль движется со скоростью x км/ч и длина тучи S км. Получаем, что скорость одного автомобиля относительно тучи $x+30$ км/ч, а другого $x-30$ км/ч. Время нахождения под дождем $\frac{S}{x+30}$ и $\frac{S}{x-30}$, одно из этих чисел в 2 раза меньше другого. Запишем уравнение

$$\frac{S}{x-30} = 2\frac{S}{x+30}, \quad x+30 = 2(x-30), \quad x = 90.$$

,

Ответ: 90 км/ч.

10. Найдите такие значения x, при которых определена функция $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}} + \sqrt{-x}$.

Решение Функция существует при условии

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x+3}{x+2} \geqslant 0, & (1) \\ -x \geqslant 0; & (2) \end{array} \right.$$

(1) $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x+2 > 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x+3 \leqslant 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$

Откуда получаем, что $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x > -2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leqslant -3, \\ x < -2. \end{cases}$ Т.е. $x \leqslant -3$ или $x > -2$.

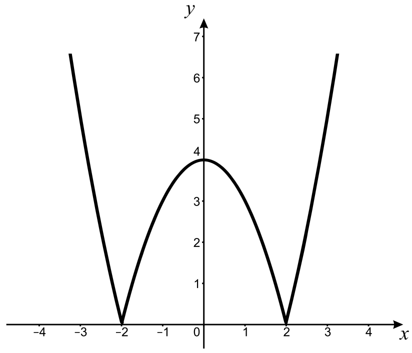
(2) $-x \geqslant 0 => x \leqslant 0$.

Возвращаясь к исходной системе $\begin{cases} x \leqslant -3, \ x > -2, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$

Ответ: $x \ \in (-\infty; -3] \cup (-2; 0]$.

11. а) Построить график функции $y = \sqrt{16 - 8x^2 + x^4}$.

б) При каких значениях a прямая $y = a$ имеет с данным графиком ровно две точки пересечения?



Решение

а) Заметим, что $16 - 8x^2 + x^4 = (4 - x^2)^2$. Тогда $y = \sqrt{(4 - x^2)^2} = |4 - x^2|$. Построим график функции $y = |4 - x^2|$.

б) Заметим, что прямая и график функций имеют две общие точки когда y $= a$ совпадает с осью Ox или расположена выше точки $(0; 4)$, т.е. при $a = 0$ или $a > 4$.

Ответ: $a = 0$ или $a > 4$.

Критерии:

“2” – построен график функции $y = 4 - x^2$ (или $y = x^2 - 4$) (1б) и найдены значения параметра $a < 4$ (или $a > -4$) (1б).

“3” – построен график функции $y = |4 - x^2|$.

“+1” – найдены значения параметра $a > 4$.

“+1” – найдено значение параметра $a = 0$.

12. Дано уравнение $x^2 - bx + c = 0$. Известно, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$. При каком наибольшем целом отрицательном значении c корни уравнения будут целыми? Найдите при этом с все корни.

Решение

Известно, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$. Откуда $\dfrac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{1}{2}$. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b, \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$$

Значит, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $c = 2b$.

Получим уравнение $x^2 - bx + 2b = 0$. Корни уравнения существуют при $D \geqslant 0$, т.е. $b^2 - 8b \geqslant 0$, неравенство верно при $b \leqslant 0$, $b \geqslant 8$. Т.к. $c = 2b < 0$ и $c \in Z$, то числа $b \geqslant 8$ не подходят. Пусть $b = -1$ тогда $D = 9$, $c = -2$. Уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет целые корни 1 и -2. С уменьшением b число c уменьшается, значит наибольшее c удовлетворяющее требованию равно -2.

Ответ: $c = -2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Критерии:

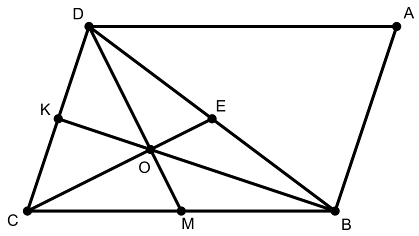
“+1” – применена теорема Виета.

“+1” – получено соотношение с $= 2b$.

“2” – найдено верное значение c, обоснована его максимальность.

“+1” – верно найдены корни квадратного уравнения, удовлетворяющие условию задачи.

13. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки M и K середины сторон BC и CD соответственно. Пусть O – точка пересечения MD и BK. Площадь четырехугольника $CMOK$ равна 4. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.



Решение

Поскольку OM – медиана треугольника CBO, используя свойства медианы, получаем, что $S_{CMO} = S_{MOB} = S_1$. Аналогично в треугольниках BOD и COD: OE и OK медианы, поэтому $S_{DEO} = S_{EOB} = S_2$, $S_{DKO} = S_{COK} = S_3$.

Поскольку KB – медиана треугольника CBD, то $S_{DKB} = S_{CBK}$. Эти площади можно записать как суммы площадей $2S_1 + S_3 = 2S_2 + S_3$, тогда получаем $S_1 = S_2$. Аналогично, из равенства $S_{CMD} = S_{MDB}$ получим, что $S_3 = S_2$. Таким образом треугольник CBD разбит на шесть равновеликих треугольников.

Четырехугольник $CMOK$ состоит из двух треугольников, поэтому $S_{COM} = \frac{1}{2} S_{CMOK} = 2$; $S_{BCD} = 6S_{COM} = 12$; $S_{ABCD} = 2S_{BCD} = 24$.

Ответ: $S_{ABCD} = 24$.

Критерии:

“1” – использовано свойство медианы.

“4” – доказано, что 6 треугольников равновелики или использовано свойство трёх медиан.

“+1” – обоснованно найдена площадь $\triangle\ BCD$.

“+1” – обоснованно найдена площадь $ABCD$.

14. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\sqrt{x} = a \geqslant 0$, $\sqrt{y} = b \geqslant 0$; тогда $x = a^2$, $y = b^2$. Получаем систему

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 - b^2 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1, \\ (a-b)(a+b) = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1, \\ 1 \cdot (a+b) = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1, \\ a + b = 5. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы получим, что $a = 3$, тогда $b = 2$. Выполним обратную замену, тогда $x = a^2 = 9$, $y = b^2 = 4$.

Ответ: $(9; 4)$.

Критерии:

“1” – замена *или* система сведена к иррациональному уравнению.

“3” – решена система с новыми переменными *или* решено иррациональное уравнение.

“4” – обоснованно получено верное решение системы.

“-1” – за неравносильные переходы без проверки.