СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 физмат и матинф классы
2021 год

1. (6 баллов) Вычислите: $\sqrt{\sqrt{2017\cdot 2019\cdot 2023\cdot 2025+36}+10}$.

Решение:

Попробуем упростить выражение под знаком радикала:

$$\sqrt{\sqrt{2017\cdot 2019\cdot 2023\cdot 2025+36}+10}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{(2021-4)\cdot(2021-2)\cdot(2021+2)\cdot(2021+4)+36}+10}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{\left(2021^2-16\right)\cdot\left(2021^2-4\right)+36}+10}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{2021^4-20\cdot 2021^2+64+36}+10}=\sqrt{\sqrt{2021^4-2\cdot 10\cdot 2021^2+10^2}+10}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{\left(2021^2-10\right)^2}+10}=\sqrt{\left(2021^2-10\right)+10}=\sqrt{2021^2}=2021.$$

Ответ: 2021.

Альтернативное решение – счет “в лоб”:

$$2017\cdot 2019\cdot 2023\cdot 2025=16\ 682\ 576\ 593\ 725$$

$$2017\cdot 2019\cdot 2023\cdot 2025+36=16\ 682\ 593\ 761$$

$$\sqrt{2017\cdot 2019\cdot 2023\cdot 2025+36}=\sqrt{16\ 682\ 593\ 761}=4\ 084\ 431$$

$$\sqrt{\sqrt{2017\cdot 2019\cdot 2023\cdot 2025+36}+10}=\sqrt{4\ 084\ 441}=2021$$

2. (5 баллов) Решите уравнение: $\dfrac{6x}{x+1}=\dfrac{12}{x^2-x+1}-\dfrac{12x^2-6x}{x^3+1}$.

Решение:

Перенесем правую часть уравнения налево и приведем все дроби к общему знаменателю x^3+1:

$$\frac{6x}{x+1}-\frac{12}{x^2-x+1}+\frac{12x^2-6x}{x^3+1}=0$$

$$\frac{6x\left(x^2-x+1\right)}{x^3+1}-\frac{12\,(x+1)}{x^3+1}+\frac{12x^2-6x}{x^3+1}=0$$

$$\frac{6x^3+6x^2-12(x+1)}{x^3+1}=0$$

$$\frac{6(x+1)(x^2-2)}{x^3+1} = 0$$

Корнями числителя являются $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ и $x_3 = -1$.

Заметим, что при $x_3 = -1$ знаменатель обращается в ноль, следовательно, этот корень посторонний.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

3. Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB отмечена точка K, такая что прямые CK и AE параллельны. Отрезки BE и CK пересекаются в точке L.

а) (6 баллов) Докажите, что L – середина отрезка CK.

б) (5 баллов) Найдите площадь треугольника BCK, если площадь трапеции $ABCD$ равна 50, а ее основания относятся как $2 : 3$.

Решение:

В зависимости от того, какое из оснований является бо́льшим, получатся разные иллюстрации к задаче (см. рис.) Доказательство пункта а) универсально и не зависит от случая, при решении пункта б) случаи будут рассмотрены отдельно.

а) Продолжим AE до пересечения с прямой BC, точку пересечения обозначим F. Треугольники ADE и FCE равны по стороне и двум прилегающим к ней углам ($\angle ADE = \angle FCE$ – накрест лежащие углы, при $AD||BC$ и секущей CD, $\angle AED = \angle FEC$ – вертикальные углы, $CE = ED$). Соответствующие стороны этих треугольников равны: $AE = EF$ и $AD = CF$.

Посмотрим на трапецию $AKCF$ ($KC||AF$). E – середина основания AF, B – точка пересечения продолжений боковых сторон AK и CF трапеции. Остается вспомнить замечательное свойство трапеции: в любой трапеции точка пересечения продолжений боковых сторон, точка пересечения диагоналей и середины оснований трапеции лежат на одной прямой. По свойству трапеции, точка L пересечения прямой EB с основанием KC, является серединой основания KC.

б) Поскольку треугольники ADE и FCE равны, их площади совпадают.

$$S_{\triangle ABF} = S_{ABCE} + S_{\triangle FCE} = S_{ABCE} + S_{\triangle ADE} = S_{ABCD} = 50.$$

Треугольники KBC и ABF подобны по двум углам ($\angle ABF$ – общий, $\angle BAF = \angle BKC$ – соответствующие углы, при $AF||KC$ и секущей AB.

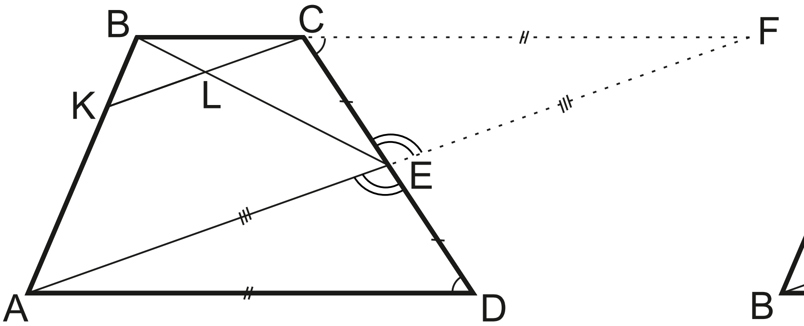


рис. 1

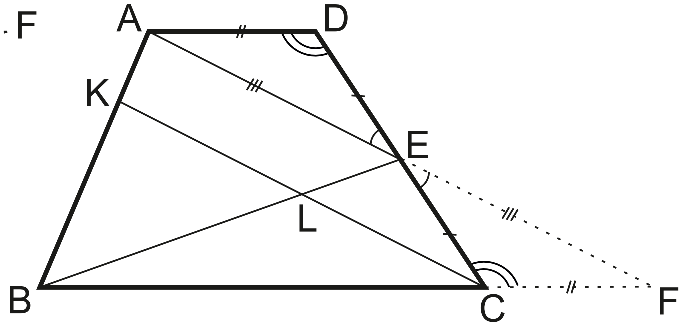


рис. 2

Следовательно, их площади относятся, как квадрат коэффициента подобия.

Для рис. 1) $\dfrac{BC}{BF}=\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{S_{KBC}}{S_{ABF}}=\dfrac{4}{25}$, откуда $S_{\Delta KBC}=\frac{4}{25}\cdot 50=8$.

Для случая 2) $\dfrac{BC}{BF}=\frac{3}{5}$, $\dfrac{S_{KBC}}{S_{ABF}}=\dfrac{9}{25}$, откуда $S_{\Delta KBC}=\dfrac{9}{25}\cdot 50=18$.

Ответ: 8 или 18.

4. (6 баллов) Изобразите множество точек плоскости xOy, для которых выполняется неравенство: $\dfrac{x^2+2x+y^2-2y+1-2xy}{|x-1|}\leqslant 0$.

Решение:

Найдем ОДЗ неравенства: $x\neq 1$.

Поскольку модуль всегда неотрицателен, знаменатель дроби можно опустить и решить неравенство $x^2+2x+y^2-2y+1-2xy\leqslant 0$ (при условии $x\neq 1$).

Преобразуем левую часть неравенства:

$$x^2+2x+y^2-2y+1-2xy=x^2-2xy+y^2+2x-2y+1=$$

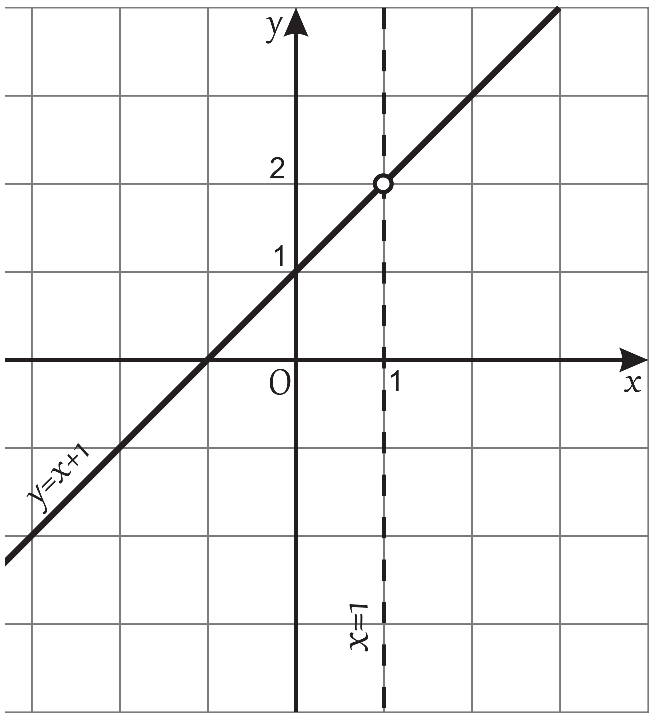
$$=(x-y)^2+2(x-y)+1=(x-y+1)^2\leqslant 0.$$

Квадрат всегда неотрицателен, следовательно, неравенство может выполняться лишь в случае $x-y+1=0$.

Из уравнения находим $y=x+1$– уравнение прямой, проходящей через точки $(-1;0)$ и $(0;1)$.

Осталось построить нужную прямую и не забыть выколоть точку с абсциссой $x=1$.

Ответ: см.рис.

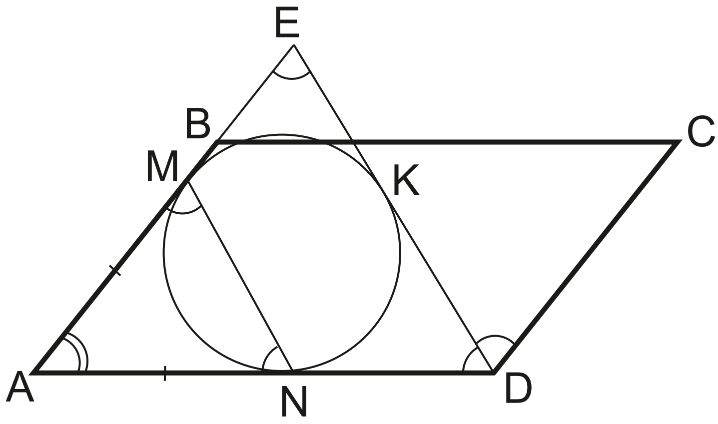


5. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке M и стороны AD в точке N.

а) (5 баллов) Докажите, что прямые MN и DE параллельны.

б) (6 баллов) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 2$ и $MN = 1$.

Решение:



а) Рассмотрим треугольник AED. $\angle AED = \angle EDC$, как накрест лежащие при прямых $AB||CD$ и секущей ED; DE – биссектриса угла D, поэтому $\angle EDC = \angle ADE$. $\triangle\ AED$ равнобедренный, $\angle AED = \angle ADE$ и $AE = AD$.

Треугольник $\triangle\ AMN$ также равнобедренный; $AM = AN$ – отрезки касательных, проведенных из точки A к одной окружности.

Рассмотренные равнобедренные треугольники имеют общий угол при вершине A, следовательно, углы при основаниях у них равны: $\angle AMN = \frac{180^o - \angle A}{2} = \angle AED$ – соответствующие углы при прямых MN и DE и секущей AE. Отсюда, $MN||DE$.

б) Обозначим точку касания окружности и ED через K, длину отрезка $ME\ = x$. Тогда по условию, $AM = 2 - x$. Из равнобедренности $\triangle\ AED$ и равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из точек E и D

$x = ME = EK = KD = DN$, поэтому $ED = 2x$.

Воспользуемся подобием треугольников AED и AMN: $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{ED}$.

$$\frac{2-x}{2} = \frac{1}{2x}$$

$$x\,(2-x) = 1$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$(x-1)^2 = 0$, откуда $x = 1$.

Вернемся к треугольнику AED: $AE = AD = 2$, $ED = 2x = 2$. Треугольник оказался равносторонним. $\angle A = 60^o$.

Ответ: $\angle A = 60^o$.

6. (6 баллов) Соня задумала некоторое трехзначное число, которое при делении на 3, на 4 и на 5 дает в остатке 2. Какое число могло быть загадано, если известно, что оно больше 500, и в его записи содержатся только две различные цифры? (Найдите все возможные ответы.)

Решение:

Обозначим число, задуманное Соней, через $\overline{abc}$ (a, b и c – цифры, $a \neq 0$, $a \geqslant 5$).

Рассмотрим деление на 5. Поскольку остаток от деления на 5 равен 2, то последней цифрой c нужного числа может быть 2 или 7. Однако число, оканчивающееся на 7, не может дать остаток 2 при делении на 4. Таким образом, последняя цифра определяется однозначно – $c = 2$.

Определим варианты для b. Средняя цифра не может быть нечетной, иначе число будет делиться на 4 нацело. Поскольку в загаданном числе только две различные цифры, и число больше 500, b также не может оказаться равной 0 или 4. Остались $b = 2$, $b = 6$ или $b = 8$.

Теперь определим возможные варианты загаданных Соней чисел:

522, 622, 722, 822, 922, 662 или 882.

Из них только два имеют остаток 2 при делении на 3 – 722 и 662.

Ответ: 662 и 722.

Альтернативное решение:

Обозначим число Сони за A. Из условия задачи это число представимо в виде $A = 5x + 2 = 4y + 2 = 3z + 2$. Равенство $5x = 4y = 3z$ выполнимо (в силу взаимной простоты чисел 5, 4 и 3) лишь тогда, когда x кратно 12, y – 15, и z – 20. Отсюда, искомый вид чисел Сони $A = 60t + 2$ (при некотором целом t). Подходящих чисел, больших 500, всего 8: 542, 602, 662, 722, 782, 842, 902, 962. Условию про две различные цифры удовлетворяют лишь два – 662 и 722.

7. (5 баллов) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 2(1 - a)x - 4 = 0$ имеет единственное решение.

Решение:

1) При $a = 0$ уравнение становится линейным $2x - 4 = 0$, единственным его решением является $x = 2$.

2) В случае $a \neq 0$ уравнение квадратное, оно может иметь одно решение лишь в случае, когда дискриминант равен 0.

$\dfrac{D}{4} = (1 - a)^2 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2 = 0$, откуда $a = -1$.

При $a = -1$ корнем уравнения $-x^2 + 4x - 4 = 0$ является $x = 2$.

Ответ: $a = 0$ или $a = -1$.

Критерии оценивания заданий очного вступительного испытания по математике в 9 ФМ и МИ классы.

В любом задании при неверно переписанном условии решение оценивается 0 баллов.

1. Полное верное решение и верный ответ – 6 баллов.

Применение формулы разности квадратов для подкоренного выражения – по 1 баллу.

Выделение полного квадрата под корнем – 2 балла.

Верный ответ – 1 балл.

Если решение содержит вычислительную ошибку или описку, снимается по 1 баллу за каждую.

2. Полное решение, верный ответ – 5 баллов.

Приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю – 2 балла.

Определение корней получившегося после приведения числителя – 2 балла.

Верный ответ, с учетом ОДЗ – 1 балл.

Если решение содержит ошибки, за каждую снимается по 1 баллу.

3. а) Верное доказательство – 6 баллов.

Достроение до равновеликого трапеции треугольника – 2 балла.

Доказательство равенства треугольников ADE и FCE – 1 балл.

Использование свойства трапеции или теоремы о пропорциональных отрезках на параллельных прямых – 3 балла.

б) Верное решение, верный ответ – 5 баллов.

Равенство площадей трапеции и треугольника – 1 балл.

Подобие нужных треугольников – 1 балл.

Верное отношение для площадей подобных треугольников – 1 балл.

При отсутствии или недостаточном обосновании этапа решения, баллы за него не добавляются.

При потере одного из вариантов ответа снимается 1 балл.

4. Верное решение – 6 баллов.

ОДЗ и знакоопределенность модуля в знаменателе – 1 балл.

Выделение полного квадрата $(y-x-1)^2$ в числителе дроби – 2 балла.

Получение решения неравенства $y=x+1$, обоснование знака равенства – 1 балл.

Построение верной прямой $y=x+1$ – 1 балл.

Выкалывание точки $(1;2)$ на прямой $y=x+1$ – 1 балл.

5. а) Верное доказательство – 5 баллов.

Обоснование равнобедренности $\triangle\ AED$– 1 балл.

Обоснование равнобедренности $\triangle\ AMN$ – 2 балла.

Равенство углов при основании $\triangle\ AED$ и $\triangle\ AMN$ – 1 балл.

Обоснованный вывод о параллельности прямых MN и DE – 1 балл.

б) Верное решение и верный ответ – 6 баллов.

Указано подобие $\triangle\ AED$ и $\triangle\ AMN$ при обоснованном его доказательстве в решении задачи – 1 балл.

Составление верной пропорции для поиска длины отрезков $AM(AN)$ или ED – 1 балл.

Верное определение длины отрезков $AM(AN)$ или ED – 2 балла.

Обоснование правильности $\triangle\ AED$ или $\triangle\ AMN$ – 1 балл.

Верный ответ – 1 балл.

При отсутствии или недостаточном обосновании этапа решения, баллы за него не добавляются.

6. Полное решение, верный ответ – 6 баллов.

В зависимости от метода решения оцениваются следующие продвижения:

Обоснованное определение последней цифры числа – 1 балл.

Отбрасывание всех неподходящих вариантов для второй цифры числа – 2 балла.

Частичное (неполное) отбрасывание неподходящих вариантов для второй цифры числа – 1 балл.

Составление или перечисление всех потенциально подходящих чисел с учетом последних двух цифр – 1 балл.

Обоснованно деление числа $A-2$ на 60 – 2 балла.

Составление или перечисление всех потенциально подходящих чисел с учетом делимости на 60 – 2 балла.

Подходящие числа в ответе – по 1 баллу за каждое верно найденное.

Если решение обоснованно, но не учтено условие о двух различных цифрах снимается 2 балла.

Если решение содержит вычислительную ошибку или описку, снимается по 1 баллу за каждую.

7. Верное решение и верный ответ – 5 баллов.

Обоснование и верное составление уравнения для дискриминанта – 2 балла.

Решение уравнения с дискриминантом, $a=-1$ – 1 балл.

Рассмотрение случая линейного уравнения, $a=0$ – 2 балла.

При всех значениях параметра а установлено, что x=2 является корнем – 2 балла.

Если решение содержит вычислительную ошибку или описку, снимается по 1 баллу за каждую.