

Решение вступительной работы по математике

для поступающих в 9 химбио класс  
(2021, очный этап)

1. Бабушка хранила семена ромашек и васильков в двух банках. В первой банке количество семян ромашек было в полтора раза больше, чем васильков. Во второй банке семян васильков было в 4 раза больше, чем семян ромашек. Внучка решила взвесить все семена. Масса семян из двух банок оказалась равной 2 кг, при этом соотношение количества семян ромашек по отношению к количеству семян васильков оказалось равно 3:5.

а) (3 балла) Сколько килограмм семян было в каждой банке до смешивания, если семя ромашки и василька весят одинаково?

б) (4 балла) Сколько килограмм семян было в каждой банке до смешивания, если семя ромашки в 2 раза легче, чем семя василька?

Решение:

а) Пусть в первой банке  $x$  семян васильков, тогда семян ромашек —  $1,5x$ . Во второй банке  $y$  семян ромашек, а семян васильков —  $4y$ . После смешивания образовалось  $x + 4y$  семян васильков и  $1,5x + y$  семян ромашек. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 4y + 1,5x + y = 2, \\ \frac{1,5x + y}{x + 4y} = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем, что  $x = \frac{7}{20}$ ,  $y = \frac{9}{40}$ . Следовательно, в первой банке было 0,875 кг, а во второй — 1,125 кг.

б) Пусть в первой банке  $x$  семян васильков, тогда семян ромашек —  $1,5x$ . Во второй банке  $y$  семян ромашек, а семян васильков —  $4y$ . После смешивания образовалось  $x + 4y$  семян васильков и  $1,5x + y$  семян ромашек. Составим систему уравнений, учитывая, что семя ромашки в 2 раза легче, чем семя василька :

$$\begin{cases} 2 \cdot (x + 4y) + 1,5x + y = 2, \\ \frac{\frac{3}{2}x + y}{x + 4y} = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем, что  $x = \frac{14}{65}$ ,  $y = \frac{9}{65}$ . Следовательно, во второй банке было  $\frac{81}{65}$  кг, а в первой —  $\frac{49}{65}$  кг.

Ответ: а) 0,875 кг, 1,125 кг; б)  $\frac{49}{65}$  кг,  $\frac{81}{65}$  кг.

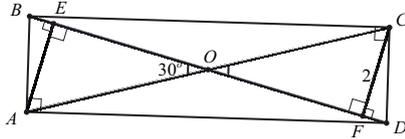
2. В прямоугольнике  $ABCD$   $AE$  и  $CF$  — перпендикуляры, опущенные из вершин  $A$  и  $C$  на диагональ  $BD$ . Угол между диагоналями равен  $30^\circ$ ,  $CF = 2$ .

а) (2 балла) Докажите, что  $AE = CF$ .

б) (3 балла) Найдите длину диагонали  $BD$ .

в) (5 баллов) Найдите стороны прямоугольника.

Решение: Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей.



а) Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам  $AO = BO = CO = DO$ . Прямоугольные треугольники  $AEO$  и  $CFO$  равны по гипотенузе и острому углу. Значит равны и соответствующие катеты  $CF = AE = 2$ .

б) Катет, лежащий напротив угла  $30^\circ$  равен половине гипотенузы.

$$CO = AO = 4, BD = AC = AO + OC = 8.$$

в) По теореме Пифагора  $AE^2 + EO^2 = AO^2$ .  $EO^2 = AO^2 - AE^2 = 16 - 4 = 12$ .  $EO = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .  $BE = BO - EO = 4 - 2\sqrt{3}$ .

$$\text{По теореме Пифагора } AB^2 = BE^2 + AE^2 = (4 - 2\sqrt{3})^2 + 4 = 16(2 - \sqrt{3}).$$

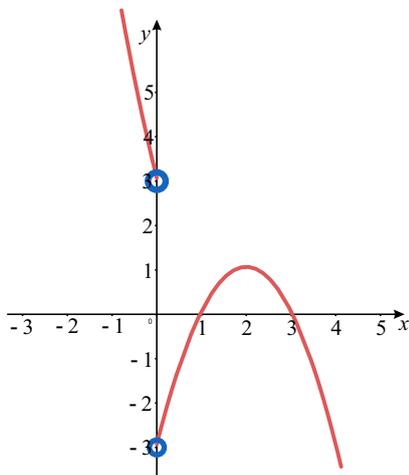
$$\text{По теореме Пифагора } AD^2 + AB^2 = BD^2. AD^2 = BD^2 - AB^2 = 64 - 16(2 - \sqrt{3}) = 16(2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Стороны прямоугольника } AD = BC = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ и } AB = CD = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: б) } 8; \text{ в) } 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}, 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

3.1 (5 баллов) Изобразите график функции  $y = \frac{x}{|x|}(4x - 3 - x^2)$ .

Решение:



3.2 (5 баллов) Сколько общих точек график  $y = \frac{x}{|x|}(4x - 3 - x^2)$  имеет с

графиком  $y = c$  при всех значениях параметра  $c$ ?

Решение: при  $c \leq -3$  — 1 точка, при  $-3 < c < 1$  — 2 точки, при  $c = 1$  — 1 точка, при  $1 < c \leq 3$  — нет точек, при  $c > 3$  — 1 точка.

4. (11 баллов) Решите уравнение:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3x+2}}} = \frac{3x^2 + 11x + 10}{36x^2 - 25} - \frac{3 - 2x}{6x - 5}$$

Решение: Преобразуем левую часть уравнения

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3x+2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3x+3}{3x+2}}} = \frac{1}{1 + \frac{3x+2}{3x+3}} = \frac{1}{\frac{6x+5}{3x+3}} = \frac{3x+3}{6x+5}$$

$$\begin{cases} 3x+2 \neq 0, \\ 3x+3 \neq 0. \end{cases}$$

Преобразуем знаменатель первого слагаемого в правой части уравнения

$$\frac{3x^2 + 11x + 10}{36x^2 - 25} = \frac{3x^2 + 11x + 10}{(6x - 5)(6x + 5)}$$

Тогда

$$\frac{3x+3}{6x+5} = \frac{3x^2 + 11x + 10}{(6x - 5)(6x + 5)} - \frac{3 - 2x}{6x - 5}$$

или

$$\frac{(3x+3)(6x-5)}{(6x+5)(6x-5)} - \frac{3x^2 + 11x + 10}{(6x-5)(6x+5)} + \frac{(3-2x)(6x+5)}{(6x-5)(6x+5)} = 0,$$

$$\frac{(3x+3)(6x-5) - (3x^2 + 11x + 10) + (3-2x)(6x+5)}{(6x+5)(6x-5)} = 0,$$

$$\frac{3x^2 - 10}{(6x+5)(6x-5)} = 0,$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 10 = 0, \\ 6x - 5 \neq 0, \\ 6x + 5 \neq 0. \end{cases}$$

$$3x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Ответ:  $x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$ .

5. Аня вычислила произведение всех чисел от 1 до 20, затем стерла все нули, стоящие в конце, а последние 2 цифры написала неразборчиво. Получилась запись

$$2432902008176ab.$$

- а) (3 балла) Сколько нулей она стерла?  
б) (4 балла) Найдите цифру, отмеченную символом  $b$ .  
в) (5 баллов) Найдите цифру, отмеченную символом  $a$ .

Решение:

а) Разложим произведение на простые множители

$$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Ноль на конце дает множитель  $10 = 2 \cdot 5$ . Таких множителей 4, следовательно, произведение будет оканчиваться четырьмя нулями  $2432902008176ab0000$ .

б) Ноль на конце дает множитель  $10 = 2 \cdot 5$ .

$$\text{Тогда } 2432902008176ab = 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Цифра, отмеченная символом  $b$ , является последней цифрой произведения последних цифр каждого множителя в разложении.

$2^{14}$  оканчивается на 4,  $3^8$  — на 1,  $7^2 \cdot 19$  — на 1,  $13 \cdot 17$  — на 1. Значит,  $b = 4$ .

в) Число  $2432902008176a4$  кратно 9, следовательно сумма цифр этого числа кратна 9.

$$2 + 4 + 3 + 2 + 9 + 0 + 2 + 0 + 0 + 8 + 1 + 7 + 6 + a + 4 = 48 + a.$$

$$9 \cdot 6 = 54 = 48 + 6. \text{ Значит, } a = 6.$$

Ответ: а) 4, б) 4, в) 6.

Критерии:

1. Бабушка хранила семена ромашек и васильков в двух банках. В первой банке количество семян ромашек было в полтора раза больше, чем васильков. Во второй банке семян васильков было в 4 раза больше, чем семян ромашек. Внучка решила взвесить все семена. Масса семян из двух банок оказалась равной 2 кг, при этом соотношение количества семян ромашек по отношению к количеству семян васильков оказалось равно 3:5.

1а) (3 балла) Сколько килограмм семян было в каждой банке до смешивания, если семя ромашки и василька весят одинаково? Ответ: 0,875 кг, 1,125 кг.

3 баллов - полное решение;

1 балл - верно составлена система;

2 балла - верно решена система;

-1 балл - за каждую арифметическую ошибку.

1б) (4 балла) Сколько килограмм семян было в каждой банке до смешивания, если семя ромашки в 2 раза легче, чем семя василька? Ответ:  $\frac{49}{65}$  кг,  $\frac{81}{65}$  кг.

4 балла - полное решение;

2 балла - верно составлена система;

2 балла - верно решена система;

-1 балл - за каждую арифметическую ошибку.

2. В прямоугольнике  $ABCD$   $AE$  и  $CF$  — перпендикуляры, опущенные из вершин  $A$  и  $C$  на диагональ  $BD$ . Угол между диагоналями равен  $30^\circ$ ,  $CF = 2$ .

2а) (2 балла) Докажите, что  $AE = CF$ .

2 балла - доказательство верно;

2б) (3 балла) Найдите длину диагонали  $BD$ . Ответ: 8.

3 балла - верно и обосновано найдена длина;

1 балл - только ответ;

-1 балл - за каждую арифметическую ошибку.

2в) (5 баллов) Найдите стороны прямоугольника. Ответ:  $4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  $4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

5 баллов - верно и обосновано найдены стороны;

2 балла - верно и обосновано найдена длина лишь одной из сторон;

1 балл - правильно применена теорема Пифагора хотя бы для одного из треугольников;

1 балл - только ответ;

-1 балл - за каждую арифметическую ошибку.

**3.1** (5 баллов) Изобразите график функции  $y = \frac{x}{|x|}(4x - 3 - x^2)$ .

5 баллов - верно построен график;

-2 балла - за каждую не выколотую точку на графике.

**3.2** (5 баллов) Сколько общих точек график  $y = \frac{x}{|x|}(4x - 3 - x^2)$  имеет с графиком  $y = c$  при всех значениях параметра  $c$ ?

1 балл - при  $c \leq -3$  - 1 точка;

1 балл - при  $-3 < c < 1$  - 2 точки;

1 балл - при  $c = 1$  - 1 точка;

1 балл - при  $1 < c \leq 3$  - нет точек;

1 балл - при  $c > 3$  - 1 точка.

**4.** (11 баллов) Решите уравнение:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3x + 2}}} = \frac{3x^2 + 11x + 10}{36x^2 - 25} - \frac{3 - 2x}{6x - 5}$$

Ответ:  $x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$ .

11 баллов - полное решение;

8 баллов - уравнение решено верно, но область допустимых значений не указана;

3 балла - верно преобразована левая часть уравнения к виду  $\frac{3x + 3}{6x + 5}$ ;

2 балла - верно преобразована левая часть уравнения к виду  $\frac{3x + 3}{6x + 5}$  без условий, что

$$\begin{cases} 3x + 2 \neq 0, \\ 3x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

3 балла - уравнение приведено к виду  $\frac{3x^2 - 10}{(6x + 5)(6x - 5)} = 0$ ;

3 балла - верно указана область допустимых значений;

1 балл - верно применена формула разности квадратов;

1 балл - только верный ответ;

-5 баллов - за каждую арифметическую ошибку.

5. Аня вычислила произведение всех чисел от 1 до 20, затем стерла все нули, стоящие в конце, а последние 2 цифры написала неразборчиво. Получилась запись

$2432902008176ab$ .

а) (3 балла) Сколько нулей она стерла? Ответ: 4.

3 балла - обосновано найдено количество нулей;

1 балл - записан только ответ или ответ найден без вычислений на чистовике.

б) (4 балла) Найдите цифру, отмеченную символом  $b$ . Ответ: 4.

4 балла - верно и обосновано найдена цифра 4;

1 балл - записан только ответ или ответ найден без вычислений на чистовике.

в) (5 баллов) Найдите цифру, отмеченную символом  $a$ . Ответ: 6.

5 баллов - верно и обосновано найдена цифра 6;

1 балл - записан только ответ или ответ найден без вычислений на чистовике.