

СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 химико-биологический класс
2021 год

1. Известно, что пятизначное число $456**$ делится на 25 и на 9. Найдите это число. Если существует несколько таких чисел, то в ответ запишите их сумму.

Решение: Число делится на 25, следовательно, оканчивается на 00, 25, 50 или 75. Число делится на 9, значит, сумма его цифр кратна 9. Лишь сумма $4+5+6+7+5=27$ кратна 9.

Ответ: 45675

2. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $|3x - 5| < 10$?

Решение: неравенство $|3x - 5| < 10$ равносильно двойному неравенству

$$-10 < 3x - 5 < 10,$$

$$-5 < 3x < 15,$$

$$\frac{-5}{3} < x < \frac{15}{3},$$

$$-1\frac{2}{3} < x < 5.$$

6 целочисленных решений, удовлетворяющие неравенству: -1, 0, 1, 2, 3, 4.

Ответ: 6

3. Найти значение выражения

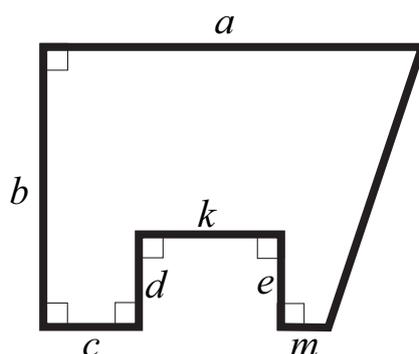
$$\frac{a^8 b^7}{(ab)^{-10} a^{16} b^{15}}, \text{ если } a = 2021, b = -1.$$

Решение: преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \frac{a^8 b^7}{(ab)^{-10} a^{16} b^{15}} &= \frac{a^8}{a^{-10} a^{16}} \cdot \frac{b^7}{b^{-10} b^{15}} = \frac{a^8}{a^6} \cdot \frac{b^7}{b^5} = \\ &= a^2 b^2 = 2021^2 (-1)^2 = 2021^2 = 4084441. \end{aligned}$$

Ответ: 4084441

4. Найдите площадь фигуры, если $a = 10$, $b = 8$, $c = d = e = 3$, $k = 4$, 5 , $m = k/3$.



Решение: для вычисления площади данной фигуры вычтем из площади трапеции с основаниями a , $c + k + m$ и высотой b площадь прямоугольника $d \cdot k$

$$\frac{a + c + k + m}{2} \cdot b - d \cdot k = \frac{10 + 3 + 4,5 + 1,5}{2} \cdot 8 - 3 \cdot 4,5 = 76 - 13,5 = 62,5.$$

Ответ: 62,5

5. Вычислите $\frac{135^2 - 135 \cdot 150 + 75^2}{135^2 - 15^2 + 45^2 - 105^2}$.

Решение: воспользуемся формулами сокращенного умножения

$$\begin{aligned} \frac{135^2 - 135 \cdot 150 + 75^2}{135^2 - 15^2 + 45^2 - 105^2} &= \frac{135^2 - 2 \cdot 135 \cdot 75}{(135^2 - 105^2) + (45^2 - 15^2)} = \\ &= \frac{(135 - 75)^2}{(135 + 105)(135 - 105) + (45 + 15)(45 - 15)} = \frac{60^2}{240 \cdot 30 + 60 \cdot 30} = \\ &= \frac{60 \cdot 60}{60 \cdot 30 \cdot 5} = \frac{2}{5} = 0,4. \end{aligned}$$

Ответ: 0,4

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + y^2 + 8 = 0, \\ 13x - 10y^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

В ответ укажите количество действительных решений системы.

Решение:

$$\begin{cases} y^2 = -4x - 8, \\ 13x - 10(-4x - 8) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = -4x - 8, \\ 53x + 81 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = -4 \cdot \left(-\frac{81}{53}\right) - 8, \\ x = -\frac{81}{53}. \end{cases}$$

$-4 \cdot \left(-\frac{81}{53}\right) - 8 = \frac{324}{53} - 8 < 0$, следовательно, система не имеет действительных решений.

Ответ: 0.

7. В стакане налито 250 мл молока. Маша хочет, чтобы молоко никогда не кончалось, поэтому, как только отпивает 50 мл, то доливает в стакан воду и перемешивает. Сколько процентов молока будет в стакане после третьей такой операции? Знак процента писать НЕ нужно.

Решение: Пусть после первого переливания содержание молока $x\%$, тогда

$$200 \cdot 100\% + 50 \cdot 0\% = 250 \cdot x\%,$$

$$x = \frac{20000}{250}\% = 80\%.$$

После второго переливания содержание молока $y\%$, тогда

$$200 \cdot 80\% + 50 \cdot 0\% = 250 \cdot y\%,$$

$$y = \frac{16000}{250}\% = 64\%.$$

После третьего переливания содержание молока $z\%$, тогда

$$200 \cdot 64\% + 50 \cdot 0\% = 250 \cdot z\%,$$

$$y = \frac{12800}{250}\% = 51,2\%.$$

Ответ: 51,2

8. Стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$. Найдите наименьший угол треугольника.

Решение: заметим, что $(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2$, то есть стороны треугольника удовлетворяют теореме Пифагора, а, следовательно, треугольник прямоугольный. В прямоугольном треугольнике катет $\sqrt{2}$ равен половине гипотенузы $2\sqrt{2}$. Значит, углы треугольника равны 30° , 60° , 90° . Наименьший угол равен 30° .

Ответ: 30

9. В трапеции $ABCD$ длины боковых сторон AB и CD равны 4 и 5 соответственно, основание BC равно 1. Проведена биссектриса угла ADC , которая пересекает сторону AB в середине. Найдите угол BAD .

Решение:

Ответ: 90

10. Найти все значения числа a , при которых построенные в одной системе координат графики функций $y = ax^2 + 2x - 1$ и $y = -2x + 3$ имеют ровно одну общую точку. Если ответов существует больше одного, в ответ запишите их произведение.

Решение: для ответа на задачу достаточно понять, что при $a = 0$ прямые $y = 2x - 1$ и $y = -2x + 3$ имеют ровно одну общую точку, значит произведение всех значений числа a равно 0.

Ответ: 0