СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 физмат и матинф классы
2021 год

1. Соня любит задачи с числами. Она выписывает различные трехзначные числа, переставляя различными способами три разные цифры: 1, 2 и 3. Чему будет равна сумма всех записанных Соней чисел?

Решение.

Самый простой способ решения этой задачи состоит в выписывании всех возможных чисел и подсчете суммы.

Приведем иное решение. Зафиксируем некоторую цифру x. Соня сможет составить два числа, в которых цифра x будет в разряде сотен, два числа, где x десятков, и еще два с x единицами. Следовательно, для выбранной цифры x в искомую сумму попадет выражение $2 \cdot (100x + 10x + x) = 2 \cdot 111x = 222x$. Поскольку x выбиралась произвольно из разрешенного набора цифр, в общую сумму все цифры попадут с одинаковыми множителями. В итоге сумма окажется равна

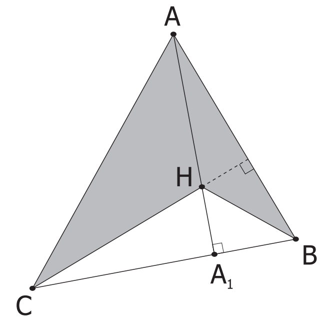
$$222 \cdot (1 + 2 + 3) = 222 \cdot 6 = 1332.$$

Ответ: 1332.

2. В треугольнике ABC сторона $BC = 6$. H – точка пересечения высот треугольника, $AH = 3$. Найдите площадь четырехугольника $ABHC$.

Решение.

Проведем высоту AA_1в треугольнике ABC, заметим, что точка H лежит на AA_1.



$$S_{ABHC} = S_{ABC} - S_{HBC} = \frac{1}{2}AA_1 \cdot BC - \frac{1}{2}HA_1 \cdot BC = \\ = \frac{1}{2}(AA_1 - HA_1) \cdot BC = \frac{1}{2}AH \cdot BC.$$

Подставляем числовые данные и получаем, что нужная площадь четырехугольника равна 9.

Ответ: 9.

3. Найдите сумму корней уравнения $x^2 + 8\sqrt{x^2} - 20 = 0$.

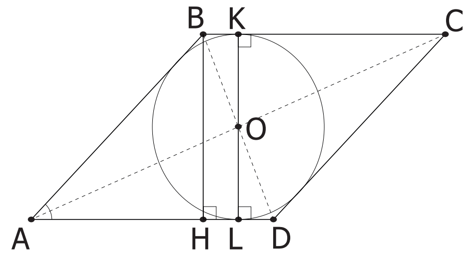
Решение.

Вынесем квадрат из-под знака радикала: $x^2 + 8|x| - 20 = 0$. Поскольку $x^2 = |x|$, уравнение приобретает вид $|x|^2 + 8|x| - 20 = 0$. Его корни $|x| = -10$ и $|x| = 2$. Первый является посторонним; второй – дает два решения $x_1 = -2$и $x_2 = 2$, их сумма равна 0.

Ответ: 0.

4. В параллелограмм $ABCD$ вписана окружность радиуса 1. Найдите периметр параллелограмма, если $\angle A\ = 30^o$

Решение.



1) Отметим, что поскольку окружность вписана в параллелограмм, то он является ромбом. Найдем его сторону.

2) Из центра O вписанной окружности опустим радиусы к точкам K и L касания окружности со сторонами BC и AD соответственно. По теореме о радиусе, проведенном в точку касания окружности и прямой, $OK \perp BC$ и $OL \perp AD$. Поскольку $BC || AD$, точки K, O и L лежат на одной прямой. KL – диаметр окружности и высота ромба, $KL = 2$.

3) Опустим высоту BH на сторону AD, $BH = KL = 2$. В прямоугольном треугольнике ABH известен катет $BH = 2$, лежащий против угла $\angle A\ = 30^o$, тогда его гипотенуза $AB = 4$.

Искомый периметр ромба $ABCD$ равен 16.

Ответ: 16.

5. Соня вновь раздумывает над числами. Помогите ей найти все целые n, при которых значение выражения $\frac{9n+32}{3n+7}$ является целым числом. Если искомых n окажется несколько, внесите в ответ их сумму.

Решение.

Преобразуем выражение $\frac{9n+32}{3n+7} = \frac{3(3n+7)+11}{3n+7} = 3 + \frac{11}{3n+7}$. Для того, чтобы все выражение было равно целому числу, последняя дробь $\frac{11}{3n+7}$ должна быть целочисленной. Для этого знаменатель дроби $3n + 7$ должен делить числитель 11. Отметим, что 11 – простое число и может делиться лишь на целые числа -11, -1, 1 и 11. Рассмотрим все случаи:

1) $3n + 7 = -11$. Получаем целое значение $n = -6$. Этот случай подходит.

2) $3n + 7 = -1$. Корень $n = -\frac{8}{3}$ целым не является. Соне такое значение не подойдет.

3) $3n + 7 = 1$, $n = -2$ – второе возможное значение n, подходящее по условию.

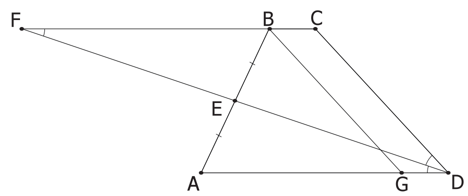
4) $3n + 7 = 11$, $n = \frac{4}{3}$ – не целое, не годится.

Сумма найденных значений n равна -8.

Ответ: -8.

6. В трапеции $ABCD$ длины боковых сторон AB и CD равны 4 и 5 соответственно, основание BC равно 1. Проведена биссектриса угла ADC, которая пересекает сторону AB в середине. Найдите угол BAD.

Решение.



Пусть E – середина AB. Продолжим биссектрису DE до пересечения с прямой BC, получим точку пересечения F.

1) Рассмотрим треугольник CDF. Он равнобедренный, так как $\angle CFD = \angle ADF = \angle CDF$. Следовательно, $CF = CD = 5$ и $BF = CF - BC = 4$.

2) Треугольники BEF и AED равны по стороне $BE = AE$ и двум углам $\angle ABF = \angle BAD$ и $\angle BEF = \angle AED$. Тогда $BF = AD = 4$.

3) Проведем $BG||CD$, $BCDG$ – параллелограмм, $BG = CD = 5$. Так как $DG = BC = 1$, длина AG равна 3.

4) Треугольник ABG является прямоугольным, так как удовлетворяет обратной теореме Пифагора: $AB^2 + AG^2 = 16 + 9 = 25 = BG^2$. Следовательно, искомый $\angle BAD = 90^o$.

Ответ: 90.

7. Лёня очень любит сухари. В понедельник он купил свежий батон весом 500 грамм и влажностью 50%, порезал на кусочки и положил сушить на батарею. Через пару дней он взвесил полуготовые сухари и обнаружил, что влажность батона уменьшилась на 12,5% по отношению к исходной. Сегодня Лёня взвесил блюдо вновь, сухари стали легче еще на 125 грамм, по отношению к предыдущему взвешиванию. Какова влажность сухарей сейчас? Ответ дайте в процентах, округлив до ближайшего целого. Знак процента писать НЕ нужно.

Решение.

1) При покупке батон весил 500 грамм и имел влажность 50%. Значит, "сухого" батона и воды было поровну, по 250 грамм. Заметим, что "сухой" батон не мог изменить свой вес в процессе сушки.

2) При первом взвешивании влажность упала на 12,5% и составляла 37,5%. Общий вес полуготовых сухарей в этот момент составлял $250 \cdot \frac{100}{100-37{,}5} = \frac{250}{0{,}625} = 400$ грамм, а воды оставалось 150 грамм.

3) При повторном взвешивании вес сухарей уменьшился еще на 125 грамм. Из общего веса в 400-125=275 грамм, вода составляла 150-125=25 грамм. Искомая величина окончательной влажности сухарей равна $\frac{25}{275} \cdot 100 = 9,(09)\,\%$.

Взвешивание	Общий вес, г	Сухой "хлеб", г	Вода, г	Влажность, %
1	500	250	250	50
2	400	250	150	37,5
3	275	250	25	?

Ответ: 9.

8. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств $|x+1| < 3$ и $\frac{7}{x} < 4$.

Решение.

Решим каждое неравенство в отдельности.

1) $|x+1| < 3$ перепишем в виде двойного неравенства $-3 < x+1 < 3$, откуда $-4 < x < 2$. Решение первого неравенства системы $x \in (-4;\ 2)$.

2) $\frac{7}{x} < 4$.

При $x > 0$ неравенство можно домножить на x и поделить на 4 с сохранением знака. В этом случае $x > \frac{7}{4}$.

В случае $x < 0$ при домножении на отрицательное $\frac{x}{4}$ знак неравенства сменится на противоположный, что даст результат $x < \frac{7}{4}$. С учетом ограничения случая получим $x < 0$.

Решением второго неравенства системы будет объединение двух лучей $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left(\frac{7}{4};\ \infty\right)$.

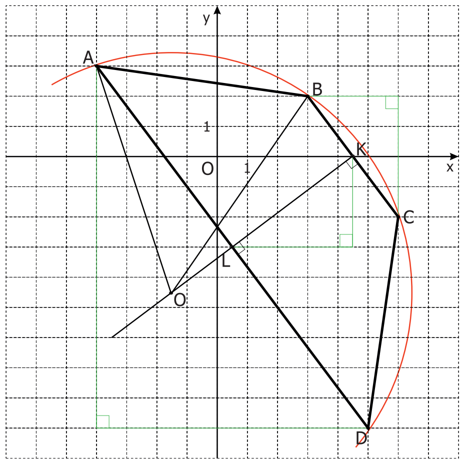
Решением системы неравенств будет $x \in (-4;\ 0)$. Наименьшее целое, попадающее в интервал, – это $x = -3$.

Ответ: -3.

9. Татьяна Павловна обозначила на координатной плоскости четыре точки: $A(-4; 3)$, $B(3; 2)$, $C(6; -2)$ и $D(5; -9)$. Наблюдательная Соня заметила, что через все эти точки можно провести окружность. Найдите квадрат её радиуса.

Решение.

1) Заметим сперва, что получившийся четырехугольник $ABCD$ – трапеция. Угловые коэффициенты для прямых AD и BC совпадают, $k = -\frac{4}{3}$. Поскольку вокруг трапеции $ABCD$ можно нарисовать окружность, эта трапеция равнобедренная $AB = CD$.



2) Найдем длины оснований трапеции (из прямоугольных треугольников):

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$
$$AD = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15.$$

3) Центр O описанной окружности равнобедренной трапеции $ABCD$ лежит на прямой, соединяющей середины ее оснований. (Отметим, что эта прямая перпендикулярна основаниям трапеции.) Пусть точки K и L – середины оснований BC и AD соответственно; $BK = 2,5$ и $AL = 7,5$. Найдем длину KL по теореме Пифагора $KL = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

4) Рассмотрим прямоугольные треугольники OAL и OBK, $AO = BO$ (как радиусы описанной окружности). Обозначим радиус описанной окружности за R, а длину отрезка LO за x. Запишем теорему Пифагора для рассматриваемых треугольников:

$$AL^2 + LO^2 = AO^2 = R^2 = BO^2 = BK^2 + KO^2$$
$$7,5^2 + x^2 = 2,5^2 + (5 + x)^2$$
$$7,5^2 - 2,5^2 - 25 = 10x$$

$10x = 25$, отсюда $OL = x = 2,5$.

Теперь вернемся к радиусу:

$$R^2 = AL^2 + LO^2 = 7,5^2 + 2,5^2 = 62,5.$$

Ответ: 62,5.

10. Найдите наибольшее целое значение параметра k, при котором сумма корней уравнения $x^2 - \left(k^2 - 5k\right)x + 4k^2 = 0$ будет отрицательной.

Решение.

1) Воспользуемся теоремой Виета. Если x_1 и x_2 – корни данного уравнения, то их сумма $x_1 + x_2 = k^2 - 5k$. Найдем k, при которых $x_1 + x_2 = k^2 - 5k < 0$. Получим $k \in (0;\ 5)$. Кажется, что ответ получен, но мы забыли проверить наличие корней у уравнения!

2) Условие существования корней квадратного уравнения – неотрицательность его дискриминанта.

$$D = \left(k^2 - 5k\right)^2 - 16k^2 \geqslant 0$$

$$\left(k^2 - 5k - 4k\right)\left(k^2 - 5k + 4k\right) = \left(k^2 - 9k\right)\left(k^2 - k\right) = k^2\,(k-9)\,(k-1) \geqslant 0$$

Заметим, что $k = 0$ является решением неравенства.

При $k \neq 0$ множитель k^2 всегда положителен, его можно опустить. Остается решить квадратное неравенство $(k-9)\,(k-1) \geqslant 0$. Решение этого неравенства $k \in (-\infty;\ 1] \cup [9;\ \infty)$.

Наибольшее целое значение k, при котором корни уравнения существуют и их сумма отрицательна, равно 1.

Ответ: 1.