

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в 10 физмат, матинф, соцэк и физтех классы
(2021, дистанционный этап)

Вам предстоит выполнить **10 заданий**. Введите ответы на задания в отведенные поля. Обратите внимание, что ответами могут быть лишь целые числа или конечные десятичные дроби (целая и дробная части в этом случае разделяются запятой). Дополнительной литературой, калькулятором, шпаргалкой и т. п. пользоваться нельзя. Знаки градуса, процентов и единицы измерения в ответе писать НЕ нужно.

Общее время выполнения работы — 90 минут
Каждое задание оценивается 5 баллами

1. Сколько целых чисел содержит множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{x}, \\ |x| \leq 3 \end{cases} ?$$

Решение. Перенеся всё в первом неравенстве системы в левую часть и приведя к общему знаменателю, получим $\frac{x^2 - 1}{x} \leq 0$. Решением этого неравенства (можно использовать, например, метод интервалов) является множество $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$. Из всех целых чисел, принадлежащих этому множеству, второму неравенству системы удовлетворяют лишь $-3, -2, -1$ и 1 .

Ответ: 4

2. В январе брюки подешевели на 20%, а в мае они подешевели еще раз, и их цена стала вдвое меньше той, что была до января. На сколько процентов подешевели брюки в мае? (Знак процента в ответе писать не нужно.)

Решение. Пусть k — коэффициент, на который умножается цена брюк при втором снижении цены. Из условия имеем $0,8 \cdot k = 0,5$, откуда $k = 0,625$. Таким образом, в мае брюки подешевели на 37,5%.

Ответ: 37,5

3. Найдите сумму целых корней уравнения $(\sqrt{4-x})^8 + (\sqrt{x-2})^6 = 24 - 4x$.

Решение. ОДЗ уравнения задается системой неравенств $4 - x \geq 0$, $x - 2 \geq 0$, откуда $x \in [2; 4]$. Из целых чисел этому множеству принадлежат лишь 2, 3 и 4. Подстановкой этих чисел в уравнение убеждаемся, что его целыми корнями являются числа 2 и 4; их сумма равна 6.

Ответ: 6

4. Периметр треугольника равен 40, одна из его сторон равна 10, а биссектриса, проведенная к этой стороне, делит треугольник на два треугольника, площадь одного из которых больше площади другого в 1,5 раза. Найдите длину большей стороны треугольника.

Решение. Площади треугольников, на которые биссектриса разбивает исходный треугольник, относятся так же, как отрезки, на которые биссектриса делит противоположную сторону (так как у треугольников, получившихся в результате разбиения, общая высота). Отношение длин этих отрезков, в свою очередь, равно отношению длин двух других сторон треугольника, которые, таким образом, можно обозначить $2x$ и $3x$. По условию $2x + 3x + 10 = 40$, откуда $x = 6$, а длины сторон треугольника равны 12, 18 и 10.

Ответ: 18

5. В Великобритании XIX века номер автомашины представлял собой четырехзначное число. Шерлок Холмс мельком увидел номер машины Степлтона, но запомнил только, что первыми двумя цифрами номера были 63 (именно в таком порядке), весь четырехзначный номер делился на 36 и никакие две цифры номера не совпадали. Найдите номер автомашины Степлтона (в ответе запишите четырехзначное число).

Решение. Если число делится на 36, то оно делится на 4 и на 9. Если число делится на 4, то его две последние цифры образуют число, которое делится на 4. Сумма цифр 6 и 3 делится на 9, а сумма всех четырех цифр тоже делится на 9, поэтому сумма двух последних цифр делится на 9. Таким образом, последние две цифры образуют число, которое делится на 4 и на 9, то есть делится на 36. Значит, последними двумя цифрами могут быть 00, 36 или 72. Первые два варианта не подходят (все цифры номера должны быть различны).

Ответ: 6372

6. Величина тупого угла вписанной трапеции в 5 раз больше величины ее острого угла. Во сколько раз диаметр описанной окружности больше диагонали трапеции?

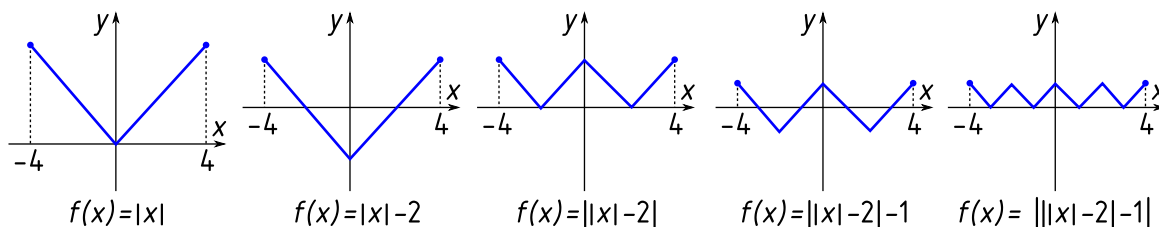
Решение. Вписанная трапеция является равнобедренной; сумма ее тупого и острого углов составляет 180° , поэтому острый угол трапеции (обозначим его α) равен $180^\circ : 6 = 30^\circ$. Если d — длина диагонали трапеции, а D — диаметр описанной окружности, то по теореме синусов, примененной к одному из треугольников, на которые трапеция разбита диагональю,

$$\frac{d}{\sin \alpha} = D \Rightarrow \frac{D}{d} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2.$$

Ответ: 2

7. Сколько звеньев имеет ломаная, заданная системой
$$\begin{cases} y = ||x| - 2| - 1|, \\ |x| \leq 4 \end{cases}$$

Решение. График функции $y = f(x) - a$ ($a > 0$) получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на a единиц вниз; график функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ отражением части графика, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси. Применяя эти два правила несколько раз, получим график, заданный приведенной в условии системой; ход построения проиллюстрирован на рисунке. У полученной в итоге ломаной 8 звеньев.



Ответ: 8

8. Фигура на плоскости задана условием $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 \leq \frac{16}{\pi}$. Найдите площадь той части фигуры, координаты точек которой удовлетворяют условию $y \geq 5x - 8$.

Решение. Первое неравенство задает круг с центром $(3; 7)$, квадрат радиуса которого равен $\frac{16}{\pi}$; второе неравенство — полуплоскость, ограниченную прямой $y = 5x - 8$. Нетрудно заметить, что эта прямая проходит через центр круга, так как $7 = 5 \cdot 3 - 8$. Поэтому часть круга, о которой идет речь в задаче, — это полукруг, площадь которого равна $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{16}{\pi} = 8$.

Ответ: 8

9. Градусные меры углов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{23}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с первым членом $\alpha_1 = 4^\circ$ и разностью 7° . Найдите значение выражения

$$(2 \cos \alpha_1 - 1)(2 \cos \alpha_2 - 1)(2 \cos \alpha_3 - 1) \dots (2 \cos \alpha_{23} - 1).$$

Решение. Заметим, что $\alpha_9 = 4^\circ + 8 \cdot 7^\circ = 60^\circ$, поэтому значение выражения в девятой скобке будет равно $2 \cos 60^\circ - 1 = 0$.

Ответ: 0

10. Пусть $f(x) = 3x^2 + 3x + 7$, $g(x) = x^2 + 17x + 1990$, $h(x) = x^2 + 16x + 2021$. Найдите корень уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$. Если корней несколько, в ответе запишите их сумму.

Решение. Заметим сначала, что при всех значениях x $g(x) > 0$ и $h(x) > 0$ (дискриминанты соответствующих квадратных трехчленов явно отрицательны). Найдём вершину параболы $y = 3x^2 + 3x + 7$: $x_0 = (-3) : 6 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, при $x > -\frac{1}{2}$ (и тем более при $x > 0$) функция $f(x)$ строго возрастает, поэтому разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции. Следовательно, из равенства $f(g(x)) = f(h(x))$ следует, что $g(x) = h(x)$, то есть

$$x^2 + 17x + 1990 = x^2 + 16x + 2021,$$

откуда $x = 31$.

Ответ: 31