СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 10 химический класс
2021 год

1. *(4 балла)* Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 45%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата мужа?

Решение. Пусть x – зарплата жены, y – зарплата мужа (в процентах от общего дохода). Тогда получаем систему $\begin{cases} x + y = 100, \\ 2x + y = 145. \end{cases}$ Отсюда находим $\begin{cases} x = 45, \\ y = 55. \end{cases}$ Если зарплата мужа увеличится вдвое, то общий доход семьи составит $x + 2y = 155\%$, т.е. увеличится на 55%.

Ответ. 55%.

2. *(6 баллов)* Найдите все целые значения n, при которых значение дроби $\dfrac{2n^2 + 7n - 4}{n + 3}$ является тоже целым числом.

Решение. Преобразуем дробь, выделив целую часть:
$$\frac{2n^2 + 7n - 4}{n + 3} = \frac{2n^2 + 6n + n + 3 - 7}{n + 3} = \frac{2n(n + 3) + (n + 3) - 7}{n + 3} = 2n + 1 - \frac{7}{n + 3}.$$
Это выражение будет целым числом, когда $n + 3$ является делителем 7. Получим все возможные случаи.
$n + 3 = 1 \Longrightarrow n = -2,$
$n + 3 = -1 \Longrightarrow n = -4,$
$n + 3 = 7 \Longrightarrow n = 4,$
$n + 3 = -7 \Longrightarrow n = -10.$

Ответ. $n \in \{-10; -4; 2; 4\}$.

3. *(6 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых число 3 находится между корнями функции $f(x) = x^2 - 4(a - 3)x - 20a + 35$.

Решение. *I способ.*
Рассмотрим уравнение $x^2 - 4(a - 3)x - 20a + 35 = 0$.
Найдем его дискриминант $D = 16(a-3)^2 - 4\cdot(-20a+35) = 16a^2 - 16a + 4 = (4a-2)^2$.
Получаем, что при любом a уравнение имеет корни
$x_1 = \dfrac{4(a - 3) + (4a - 2)}{2} = 4a - 7$, $x_2 = \dfrac{4(a - 3) - (4a - 2)}{2} = -5$.
Число 3 лежит между ними, когда $4a - 7 > 3$, то есть $a > 2{,}5$.

II способ.

Число d находится между корнями функции $f(x) = x^2 + px + q \iff f(d) < 0$.
Имеем $3^2 - 4(a-3)\cdot 3 - 20a + 35 < 0 \iff 80 - 32a < 0 \iff a > 2{,}5$.

Ответ. $a \in (2{,}5; +\infty)$.

4. *(6 баллов)* Решите систему уравнений $\begin{cases} 4|x| + 3y = 8, \\ 4x - y = 1. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} 4|x| + 3y = 8, \\ 4x - y = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} 4|x| + 12x + 3 = 8, \\ y = 4x - 1. \end{cases}$

Решим отдельно первое уравнение системы.
$4|x| + 12x - 3 = 8 \iff 4|x| + 12x = 11 \iff$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 4x + 12x = 11; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -4x + 12x = 11. \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = \dfrac{11}{16}; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = \dfrac{11}{8}. \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11}{16}, \\ \varnothing. \end{array}\right.$$

Вернемся к системе.

$$\begin{cases} x = \dfrac{11}{16}, \\ y = 4x - 1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{11}{16}, \\ y = \dfrac{11}{4} - 1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{11}{16}, \\ y = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\dfrac{11}{16}; \dfrac{7}{4}\right)$.

5. *(6 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{4}{3-x} < \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{3-x}$.

Решение. Найдем область допустимых значений неравенства.

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geqslant 0, \\ 3 - x \neq 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x \geqslant 4, \end{array}\right. \\ x \neq 3. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x \geqslant 4. \end{array}\right.$$

Рассмотрим каждый промежуток ОДЗ отдельно.

При $x \leqslant -4$ знаменатель дроби $3 - x > 0$, поэтому умножая на него, получим $\sqrt{x^2-16} > 4$, откуда $x^2 > 32$. Решением этого неравенства будет совокупность $\left[\begin{array}{l} x < -4\sqrt{2}, \\ x > 4\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Пересекая с условием $x \leqslant -4$, получаем $x < -4\sqrt{2}$.

При $x \geqslant 4$ знаменатель дроби $3 - x < 0$, тогда при умножении на него получим $\sqrt{x^2 - 16} < 4$, откуда $x^2 < 32$. Решением этого неравенства будет интервал $-4\sqrt{2} < x < 4\sqrt{2}$, пересекая с условием $x \geqslant 4$, получаем $4 \leqslant x < 4\sqrt{2}$.

Ответ. $x \in (-\infty; -4\sqrt{2}) \cup [4; 4\sqrt{2})$.

6. Два луча, исходящие из точки A, образуют угол в $60°$. Один из лучей проходит через центр окружности O, причем $OA = 8$. Второй луч пересекает эту окружность в точках B и C. Точка B находится между точками A и C, $AB = 3$. Найдите

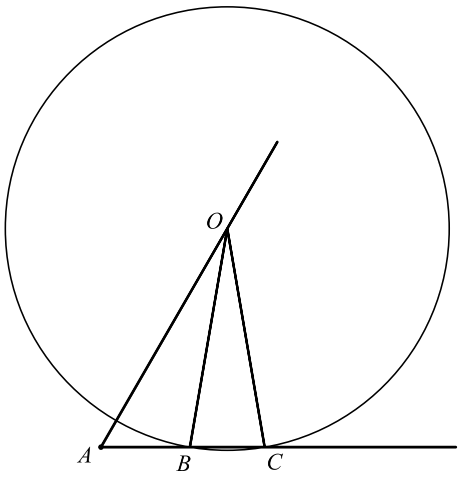
а)*(5 баллов)* радиус окружности;

б)*(5 баллов)* длину хорды BC.

Решение.

а) Для треугольника ABO запишем теорему косинусов

$OB^2 = AB^2 + AO^2 - 2AB \cdot AO \cdot \cos 60° = 9 + 64 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 49$. Получаем $OB = 7$.



б) Пусть $BC = x$, тогда $AC = x + 3$. Для треугольника ACO по теореме косинусов имеем $CO^2 = AC^2 + AO^2 - 2AC \cdot CO \cdot \cos 60°$.

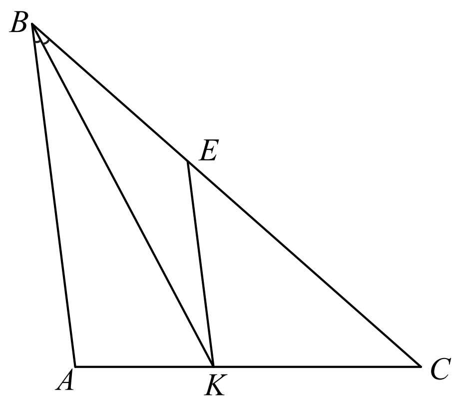
Подставляя данные, получаем $49 = (x+3)^2 + 64 - 2(x+3) \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2}$, преобразовываем $49 = x^2 + 6x + 9 + 64 - 8x - 24$, упрощаем $x^2 - 2x = 0$, имеем $x = 0$ или $x = 2$. По условию задачи получаем $BC = 2$.

Ответ. а) $R = 7$, б) $BC = 2$.

7. Биссектриса BK треугольника ABC делит сторону AC на отрезки $AK = 12$ и $CK = 18$. Точка E лежит на стороне BC и $KE || AB$, $BE = 18$. Найдите

а)*(6 баллов)* длину стороны BC;

б)*(6 баллов)* периметр треугольника ABC.



Решение. а) $\triangle ABC \sim \triangle KEC$ ($\angle BAC = \angle EKC$, $\angle ABC = \angle CEK$ как соответственные при $AB || KE$).

Запишем отношение подобия $\dfrac{AC}{KC} = \dfrac{BC}{EC}$.

Принимая $EC = x$, $BC = x + 18$, получим

$\dfrac{30}{18} = \dfrac{x + 18}{x}$, $30x = 18x + 324$, откуда $x = 27$. Получаем $BC = 27 + 18 = 45$.

б) По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$, получаем $\frac{12}{18} = \frac{AB}{45}$, откуда $AB = \frac{12 \cdot 45}{18} = 30$.

$P_{ABC} = AB + AC + BC = 30 + 30 + 45 = 105$.

Ответ. а) $BC = 45$, б) $P_{ABC} = 105$.

Критерии проверки

1. *(4 балла)* Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 45%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата мужа? Ответ. 55%.

4 балла – приведено полное обоснованное решение

3 балла – была допущена арифметическая ошибка или не было сделано достаточно пояснений при верном ответе

1 балл – верно составлена система по условиям задачи, но решение не доведено до конца

2. *(6 баллов)* Найдите все целые значения n, при которых значение дроби $\dfrac{2n^2+7n-4}{n+3}$ является тоже целым числом. Ответ. $n \in \{-10; -4; 2; 4\}$.

6 баллов – приведено полное обоснованное решение

5 баллов – допущена одна вычислительная ошибка, существенно не повлиявшая на ответ

4 балла – рассмотрены не все случаи делителей 7

2 балла – верно выделены целая и дробная части выражения, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют

1 балла – верно произведено деление числителя на знаменатель *уголком*, но дальше решение отсутствует

3. *(6 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых число 3 находится между корнями функции $f(x) = x^2 - 4(a-3)x - 20a + 35$. Ответ. $a \in (2{,}5; +\infty)$.

6 баллов – приведено полное обоснованное решение

5 баллов – допущена одна вычислительная ошибка, существенно не повлиявшая на ответ

3 балла – верно найдены корни квадратного уравнения, но дальнейшее решение отсутствует или неверно

2 балла – верно записаны условия в общем виде с графической интерпретацией, но решение отсутствует или не доведено до конца

1 балл – верно найден дискиминант, но продвижений в решении нет

4. *(6 баллов)* Решите систему уравнений $\begin{cases} 4|x| + 3y = 8, \\ 4x - y = 1. \end{cases}$ Ответ. $\left(\dfrac{11}{16}; \dfrac{7}{4}\right)$.

6 баллов – приведено полное обоснованное решение

5 баллов – допущена одна вычислительная ошибка или записан ответ без отбора корней (при этом приведены условия раскрытия модуля)

2 баллов – рассмотрены 2 системы и получены решения без учета условий раскрытия модуля

1 балл – рассмотрен только случай положительного подмодульного выражения (без записи условий и пр.)

5. *(6 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{4}{3-x} < \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{3-x}$.
Ответ. $x \in (-\infty; -4\sqrt{2}) \cup [4; 4\sqrt{2})$.

6 баллов – приведено полное обоснованное решение

5 баллов – допущена одна вычислительная ошибка, существенно не повлиявшая на ответ

4 балла – верно сделаны все действия, сводящие к определению промежутков (метод интервалов или совокупность систем), но множество значений выбрано неверно (в результате ошибки в знаках и т.п.)

3 балла – сделан верный переход от исходного неравенства к совокупности систем, но дальнейшее решение неверно или отсутствует

2 балла – верно решено иррациональное неравенство, полученное из исходного откидыванием знаменателя (умножением на знаменатель без учета знака)

1 балл – верно найдена ОДЗ, но дальнейшее решение неверно или отсутствует

6. Два луча, исходящие из точки A, образуют угол в 60°. Один из лучей проходит через центр окружности O, причем $OA = 8$. Второй луч пересекает эту окружность в точках B и C. Точка B находится между точками A и C, $AB = 3$. Найдите

а)*(5 баллов)* радиус окружности; Ответ. а) $R = 7$.

5 баллов – приведено полное обоснованное решение

4 балла – допущена одна вычислительная ошибка, существенно не повлиявшая на ответ

2 балла – приведено решение задачи с неверно записанной теоремой косинусов (потеря двойки, не тот знак в формуле и т.п.)

б)*(5 баллов)* длину хорды BC. Ответ. б) $BC = 2$.

5 баллов – приведено полное обоснованное решение

4 балла – допущена одна арифметическая ошибка, существенно не повлиявшая на ответ

2 балла – приведено решение задачи с неверно записанной формулой (в теореме косинусов или теореме о касательной и секущей)

7. Биссектриса BK треугольника ABC делит сторону AC на отрезки $AK = 12$ и $CK = 18$. Точка E лежит на стороне BC и $KE || AB$, $BE = 18$. Найдите а)*(6 баллов)* длину стороны BC;   Ответ. а) $BC = 45$.

6 баллов – приведено полное обоснованное решение

5 баллов – допущена одна арифметическая ошибка, существенно не повлиявшая на ответ

2 балла – доказано подобие и верно записано отношение подобия, но дальнейшее решение отсутствует или неверно

1 балл – приведено только доказательство подобия

б)*(6 баллов)* периметр треугольника ABC.   Ответ. б) $P_{ABC} = 105$.

6 баллов – приведено полное обоснованное решение

5 баллов – допущена одна арифметическая ошибка, существенно не повлиявшая на ответ

3 балла – приведено решение с ошибкой в формуле из теоремы о биссектрисе