ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в 10 физмат, матинф, соцэк и физтех классы
(2021, очный этап)

Критерии оценки являются примерными и могут уточняться предметной комиссией, исходя из особенностей конкретной работы

Вариант 1

1а. *(3 балла)* Имеется три квадрата. Периметр первого квадрата равен сумме периметров второго и третьего квадратов, а площадь первого квадрата в 1,6 раза больше суммы площадей второго и третьего квадратов. Найдите периметр второго квадрата и периметр третьего квадрата, если периметр первого квадрата равен 8.

Решение. Пусть периметр второго квадрата равен x, тогда периметр третьего квадрата равен $8-x$. По условию площадь первого квадрата равна $(8:4)^2=4$, откуда получим

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{8-x}{4}\right)^2=\frac{4}{1,6}.$$

Решая это уравнение, находим, что $x_1=2$, $x_2=6$.

Ответ: 2 и 6 или 6 и 2.

Задача решена верно	3
Ход решения верен, допущена арифметическая ошибка	1

1б. *(7 баллов)* Имеется три квадрата. Периметр первого квадрата равен сумме периметров второго и третьего квадратов, а площадь первого квадрата в k раз больше суммы площадей второго и третьего квадратов, причем k — целое число и $k \neq 1$. Найдите k.

Решение. Пусть периметр первого квадрата равен p, а периметр второго квадрата равен x, тогда периметр третьего квадрата равен $p-x$. Площадь первого квадрата в этом случае равна $\left(\frac{p}{4}\right)^2$; получим:

$$k\cdot\left(\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{p-x}{4}\right)^2\right)=\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

или, после преобразований,

$$2kx^2-2pkx+(k-1)p^2=0.$$

Из условия следует, что это уравнение имеет хотя бы одно решение, поэтому его дискриминант должен быть неотрицателен, то есть

$$\frac{D}{4}=(pk)^2-2k(k-1)p^2=p^2k(2-k)\geqslant 0,$$

откуда $k\leqslant 2$. Но k — целое число, не равное 1, поэтому $k=2$.

Ответ: $k=2$.

Задача решена верно	7
Задача в целом решена верно, но в обосновании верного ответа имеются пробелы	5
Верно составлено уравнение, дальнейшее решение ошибочно	3
Приведен верный ответ и сделана попытка его обоснования, однако эта попытка строгим обоснованием не является	1

В задачах 2а и 2б найдите все возможные варианты ответа (если вы нашли ответ подбором, докажите, что других вариантов нет).

2а. *(3 балла)* 7 девочек и сколько-то мальчиков ели конфеты. Всего они съели 65 конфет, причем каждый ребенок съел одинаковое количество конфет, большее 1. Сколько было мальчиков?

Решение. Из условия следует, что общее количество детей — делитель числа 65, не равный 65 (иначе получилось бы, что каждый ребенок съел по одной конфете), то есть 5 или 13. Кроме того, общее количество детей больше 7, поэтому оно равно 13.

Ответ: 6 мальчиков.

Задача решена верно	3
Ответ верен, но в тексте решения строгого доказательства единственности этого ответа не содержится, либо приведен ответ без решения	1

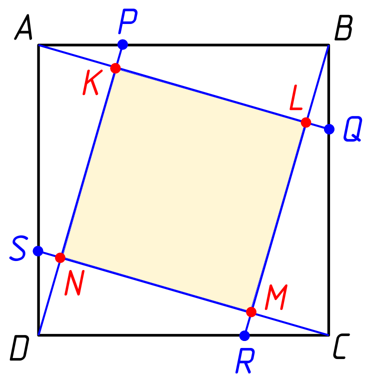
2б. *(7 баллов)* 7 девочек и k мальчиков ($k > 0$) решали примеры по математике. Всего они решили k^2 примеров, причем каждый ребенок решил одинаковое количество примеров. По сколько примеров решил каждый ребенок?

Решение. Из условия следует, что k^2 делится на $k+7$, то есть $\dfrac{k^2}{k+7}$ — целое число. Заметим, что
$$\frac{k^2}{k+7} = \frac{(k-7)(k+7)+49}{k+7} = k-7+\frac{49}{k+7},$$
поэтому 49 делится на $k+7$, откуда $k+7 \in \{1, -1, 7, -7, 49, -49\}$, $k \in \{-6, -8, 0, -14, 42, -56\}$. Таким образом, мальчиков было $k = 42$, всего детей было 49 и каждый решил по $42^2 : 49 = 36$ примеров.

Ответ: по 36 примеров.

Задача решена верно	7
Обоснованно получен верный ответ, однако доказательство его единственности содержит пробелы	5
В решении содержится верная идея использования свойств делимости, однако при ее реализации допущены ошибки, получен неверный ответ или ход решения верен, приведено полное доказательство единственности ответа, но ответ неверен из-за арифметической ошибки	3
Ответ верен, но в тексте решения верных идей использования свойств делимости для доказательства единственности этого ответа не содержится, либо приведен ответ без решения	1

3а. *(7 баллов)* На сторонах квадрата $ABCD$ взяты точки P, Q, R, S, при этом $AP = BQ = CR = DS = 1$, $PB = 3$. Отрезки AQ, BR, CS и DP пересекаются в точках K, L, M, N, как показано на рисунке. Докажите, что $KLMN$ — квадрат.



Решение. Прямоугольные треугольники ABQ, BCR, CDS и DAP равны по двум катетам, поэтому углы BAQ, CBR, DCS и ADP равны. Пусть $\angle ADP = \alpha$, тогда $\angle APD = 90^\circ - \alpha$, поэтому из рассмотрения треугольника AKP получаем, что угол AKP — прямой, тогда прямым является и вертикальный с ним угол NKL. Аналогично доказывается, что все углы четырехугольника $KLMN$ — прямые.

Рассмотрим теперь прямоугольные треугольники APK, BQL, CRM и DSN. Они равны по гипотенузе и острому углу, поэтому их стороны соответственно равны. Таким образом, длины сторон четырехугольника $KLMN$ получаются путем вычитания соответственно равных отрезков из равных отрезков:

$$KL = AQ - AK - LQ;\ LM = BR - BL - MR;\ MN = CS - CM - NS;\ NK = DP - DN - KP$$

и потому равны. Итак, у четырехугольника $KLMN$ все углы прямые и все стороны равны, поэтому он является квадратом. (В решении варианта 2 приведен другой способ доказательства.)

Задача решена верно	7
Ход решения верен, но отдельные его шаги недостаточно обоснованы	5
Доказано только равенство всех четырех сторон или равенство всех четырех углов	3
В тексте решения содержатся лишь отдельные верные доказанные утверждения	1

3б. *(7 баллов)* В условиях предыдущей задачи найдите площадь квадрата $KLMN$.

Решение. По теореме Пифагора $AQ = \sqrt{17}$. Прямоугольные треугольники AKP и ABQ подобны (у них общий острый угол A), поэтому $AK : AP = AB : AQ$, откуда $AK = \dfrac{AP \cdot AB}{AQ} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$, тогда по теореме Пифагора из треугольника AKP имеем $KP = \sqrt{1 - \dfrac{16}{17}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$. Но $LQ = KP$ ($\triangle APK = \triangle BQL$, как было доказано в решении предыдущей задачи), поэтому

$$KL = \sqrt{17} - \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}}.$$

Теперь легко найти площадь квадрата $KLMN$: $S_{KLMN} = KL^2 = \dfrac{144}{17}$.

Ответ: $\frac{144}{17} = 8\frac{8}{17}$.

Задача решена верно	7
Задача решена верно, получен верный ответ, имеются пробелы в обосновании отдельных шагов решения	5
Ход решения верен, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	3
Идея решения верна, допущена содержательная (не арифметическая) ошибка при применении свойств подобия или теоремы Пифагора; дальнейшее решение с этой ошибкой верно	1

4а. *(7 баллов)* Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x(x+6) + y(y+2) = 6, \\ x(x-2) + y(y-4) = -1\ ? \end{cases}$$

Ответ обоснуйте.

Решение. Выделив полные квадраты в каждом уравнении системы, получим

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y+1)^2 = 16, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы задает окружность: первое — с центром $(-3, -1)$ радиуса 4, второе — с центром $(1, 2)$ радиуса 2. Расстояние между центрами этих окружностей равно

$$\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-2)^2} = 5,$$

а их радиусы равны 4 и 2, поэтому окружности имеют две точки пересечения.

Ответ: два решения.

Задача решена верно	7
В решении содержится верная идея; ход решения верен, но присутствуют ошибки в преобразованиях или вычислениях; может быть получен как верный, так и неверный ответ	3
Приведен верный ответ и сделана попытка его обоснования, не содержащая идеи доказательства	1

4б. *(9 баллов)* При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x(x+6)+y(y+2)=6, \\ x(x-2)+y(y-4)=a^2-5 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение? Найдите все возможные значения a.

Решение. Выделяя, как и прежде, полные квадраты, получим

$$\begin{cases} (x+3)^2+(y+1)^2=16, \\ (x-1)^2+(y-2)^2=a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы задает окружность с центром $(-3,-1)$ радиуса 4, второе — с центром $(1,2)$ радиуса $|a|$. Расстояние между центрами этих окружностей, как мы убедились выше, равно 5. Для того, чтобы окружности имели только одну общую точку, радиус второй окружности должен быть равен 1 (в этом случае окружности будут касаться внешним образом) или 9 (в этом случае первая окружность будет лежать внутри второй окружности и они будут касаться внутренним образом).

Таким образом, $|a|=1$ или $|a|=9$.

Ответ: $a \in \{1,-1,9,-9\}$.

Верно и обоснованно найдены все значения параметра	9
Верно найдены все значения параметра, в обосновании содержатся пробелы	7
Идея решения верна; найдены все четыре значения параметра, неверных из-за вычислительных ошибок	4
Верно найдены два значения параметра	3
Верно найдено одно значение параметра	2
Идея решения верна; найдены одно или два значения параметра, неверных из-за вычислительных ошибок	1

Вариант 2

1а. *(3 балла)* Цена сапфира (в тысячах долларов) вычисляется по формуле $c=5m^2$, где m — его масса в граммах. Кусочек сапфира массой 9 г раскололся на два кусочка (не обязательно равных по массе); сумма их цен оказалась меньше цены первоначального кусочка в 1,8 раза. Найдите массы полученных кусочков.

Решение. Пусть масса первого кусочка (в граммах) равна x, тогда масса второго кусочка равна $9-x$. Из условия получим:

$$1,8\cdot\left(5x^2+5(9-x)^2\right)=5\cdot 9^2.$$

Решая это уравнение, находим, что $x_1=3$, $x_2=6$. Заметим также, что $9-3=6$, $9-6=3$.

Ответ: 3 г и 6 г.

Задача решена верно	3
Ход решения верен, допущена арифметическая ошибка	1

1б. *(7 баллов)* Цена сапфира (в тысячах долларов) вычисляется по формуле $c = 5m^2$, где m — его масса в граммах. Кусочек сапфира раскололся на два кусочка (не обязательно равных по массе); сумма их цен оказалась меньше цены первоначального кусочка в n раз, причем n — целое число и $n \neq 1$. Найдите n.

Решение. Пусть масса первоначального кусочка (в граммах) равна p, а масса одного из полученных кусочков равна x, тогда масса второго полученного кусочка равна $p-x$. Из условия получим:

$$n \cdot \left(5x^2 + 5(p-x)^2\right) = 5p^2$$

или, после преобразований,

$$2nx^2 - 2pnx + (n-1)p^2 = 0.$$

Из условия следует, что это уравнение имеет хотя бы одно решение, поэтому его дискриминант должен быть неотрицателен, то есть

$$\frac{D}{4} = (pn)^2 - 2n(n-1)p^2 = p^2n(2-n) \geqslant 0,$$

откуда $n \leqslant 2$. Но n — целое число, не равное 1, поэтому $n = 2$.

Ответ: $n = 2$.

Задача решена верно	7
Задача в целом решена верно, но в обосновании верного ответа имеются пробелы	5
Верно составлено уравнение, дальнейшее решение ошибочно	3
Приведен верный ответ и сделана попытка его обоснования, однако эта попытка строгим обоснованием не является	1

В задачах 2а и 2б найдите все возможные варианты ответа (если вы нашли ответ подбором, докажите, что других вариантов нет).

2а. *(3 балла)* На конкурсе поваров 5 мужчин и сколько-то женщин жарили котлеты. Всего они пожарили 51 котлету, причем каждый человек пожарил одинаковое количество котлет, большее 1. Сколько было женщин?

Решение. Из условия следует, что общее количество людей — делитель числа 51, не равный 51 (иначе получилось бы, что каждый человек пожарил по одной котлете), то есть 3 или 17. Кроме того, общее количество людей больше 5, поэтому оно равно 17.

Ответ: 12 женщин.

Задача решена верно	3
Ответ верен, но в тексте решения строгого доказательства единственности этого ответа не содержится, либо приведен ответ без решения	1

2б. *(7 баллов)* 5 мужчин и n женщин ($n > 0$) ели орехи. Всего они съели n^2 орехов, причем каждый человек съел одинаковое количество орехов. По сколько орехов съел каждый человек?

Решение. Из условия следует, что n^2 делится на $n+5$, то есть $\dfrac{n^2}{n+5}$ — целое число. Заметим, что

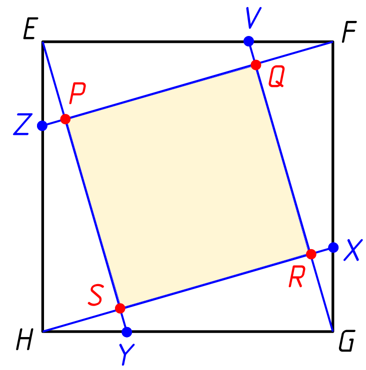
$$\frac{n^2}{n+5} = \frac{(n-5)(n+5)+25}{n+5} = n - 5 + \frac{25}{n+5},$$

поэтому 25 делится на $n+5$, откуда $n+5 \in \{1, -1, 5, -5, 25, -25\}$, $n \in \{-4, -6, 0, -10, 20, -30\}$. Таким образом, женщин было $n = 20$, всего людей было 25 и каждый съел по $20^2 : 25 = 16$ орехов.

Ответ: по 16 орехов.

Задача решена верно	7
Обоснованно получен верный ответ, однако доказательство его единственности содержит пробелы	5
В решении содержится верная идея использования свойств делимости, однако при ее реализации допущены ошибки, получен неверный ответ или ход решения верен, приведено полное доказательство единственности ответа, но ответ неверен из-за арифметической ошибки	3
Ответ верен, но в тексте решения верных идей использования свойств делимости для доказательства единственности этого ответа не содержится, либо приведен ответ без решения	1

3а. *(7 баллов)* На сторонах квадрата $EFGH$ взяты точки V, X, Y, Z, при этом $VF = XG = YH = ZE = 2$, $EV = 5$. Отрезки ZF, VG, XH и YE пересекаются в точках P, Q, R, S, как показано на рисунке. Докажите, что $PQRS$ — квадрат.



Решение. Рассмотрим поворот плоскости на 90° против часовой стрелки относительно центра квадрата $EFGH$. Отрезок EF отображается в отрезок HE, поэтому V отображается в Z; аналогично для всех сторон квадрата $EFGH$ и точек V, X, Y, Z. Тогда ZF отображается в YE, а VG — в ZF, поэтому Q отображается в P (при любом отображении плоскости на себя пересечение фигур отображается в пересечение их образов). Рассуждая аналогично, получим, что $P \to S$, $S \to R$, $R \to Q$. Поэтому у четырехугольника $PQRS$ все четыре угла равны и все стороны равны, то есть он является квадратом. (В решении варианта 1 приведен другой способ доказательства.)

Задача решена верно	7
Ход решения верен, но отдельные его шаги недостаточно обоснованы	5
Доказано только равенство всех четырех сторон или равенство всех четырех углов	3
В тексте решения содержатся лишь отдельные верные доказанные утверждения	1

3б. *(7 баллов)* В условиях предыдущей задачи найдите площадь квадрата $PQRS$.

Решение. По теореме Пифагора $FZ = \sqrt{53}$. Прямоугольные треугольники EFZ и QFV подобны (у них общий острый угол F), поэтому $FQ : FV = FE : FZ$, откуда $FQ = \dfrac{FV \cdot FE}{FZ} = \dfrac{14}{\sqrt{53}}$, тогда по теореме Пифагора из треугольника FQV имеем $QV = \sqrt{4 - \dfrac{196}{53}} = \dfrac{4}{\sqrt{53}}$. Но $PZ = QV$ (QV отображается в PZ при повороте, рассмотренном в решении предыдущей задачи), поэтому

$$PQ = \sqrt{53} - \frac{14}{\sqrt{53}} - \frac{4}{\sqrt{53}} = \frac{35}{\sqrt{53}}.$$

Теперь легко найти площадь квадрата $PQRS$: $S_{PQRS} = PQ^2 = \dfrac{1225}{53}$.

Ответ: $\frac{1225}{53} = 23\frac{6}{53}$.

Задача решена верно	7
Задача решена верно, получен верный ответ, имеются пробелы в обосновании отдельных шагов решения	5
Ход решения верен, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	3
Идея решения верна, допущена содержательная (не арифметическая) ошибка при применении свойств подобия или теоремы Пифагора; дальнейшее решение с этой ошибкой верно	1

4а. *(7 баллов)* Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x(x+4)+y(y+2)=4, \\ x(x-8)+y(y-14)=-1\ ? \end{cases}$$

Ответ обоснуйте.

Решение. Выделив полные квадраты в каждом уравнении системы, получим

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2=9, \\ (x-4)^2+(y-7)^2=64. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы задает окружность: первое — с центром $(-2,-1)$ радиуса 3, второе — с центром $(4,7)$ радиуса 8. Расстояние между центрами этих окружностей равно

$$\sqrt{(-2-4)^2+(-1-7)^2}=10,$$

а их радиусы равны 3 и 8, поэтому окружности имеют две точки пересечения.

Ответ: два решения.

Задача решена верно	7
В решении содержится верная идея; ход решения верен, но присутствуют ошибки в преобразованиях или вычислениях; может быть получен как верный, так и неверный ответ	3
Приведен верный ответ и сделана попытка его обоснования, не содержащая идеи доказательства	1

4б. *(9 баллов)* При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} x(x+4)+y(y+2)=b^2-5, \\ x(x-8)+y(y-14)=-1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение? Найдите все возможные значения b.

Решение. Выделяя, как и прежде, полные квадраты, получим

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2=b^2, \\ (x-4)^2+(y-7)^2=64. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы задает окружность с центром $(-2,-1)$ радиуса $|b|$, второе — с центром $(4,7)$ радиуса 8. Расстояние между центрами этих окружностей, как мы убедились выше, равно 10. Для того, чтобы окружности имели только одну общую точку, радиус первой окружности должен быть равен 2 (в этом случае окружности будут касаться внешним образом) или 18 (в этом случае вторая окружность будет лежать внутри первой окружности и они будут касаться внутренним образом).

Таким образом, $|b|=2$ или $|b|=18$.

Ответ: $b\in\{2,-2,18,-18\}$.

Верно и обоснованно найдены все значения параметра	9
Верно найдены все значения параметра, в обосновании содержатся пробелы	7
Идея решения верна; найдены все четыре значения параметра, неверных из-за вычислительных ошибок	4
Верно найдены два значения параметра	3
Верно найдено одно значение параметра	2
Идея решения верна; найдены одно или два значения параметра, неверных из-за вычислительных ошибок	1