

СУНЦ УрФУ, 2020 год
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 10 математико-информационный и
10 социально-экономический классы

Часть 1 (продолжительность 1,5 часа)

Введите ответы на задания в отведенные поля. Обратите внимание, что ответами могут быть лишь целые числа или конечные десятичные дроби (целая и десятичная часть в этом случае разделяются запятой). В случае, если ответов в задании получилось несколько, укажите их все в порядке возрастания, без пробелов, запятых или иных разделителей (например, если получились ответы -1 и $2,5$, то внести в поле ответа следует $-12,5$). Дополнительной литературой, калькулятором, шпателькой и т.п. пользоваться нельзя. Знаки градуса, процентов и единицы измерения в ответе писать НЕ нужно.

1. (2 балла) При $|a| < 1$ упростите выражение

$$\frac{(a^2 - a\sqrt{12} + 3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3} - a} + \frac{(a^2 + a\sqrt{12} + 3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3} + a}.$$

Решение. Выделим формулы квадрата разности и квадрата суммы в числителях дробей. Получим

$$\frac{(a^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{3} + 3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3} - a} + \frac{(a^2 + 2 \cdot a \cdot \sqrt{3} + 3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3} + a} = \frac{((a - \sqrt{3})^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3} - a} + \frac{((a + \sqrt{3})^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3} + a}.$$

По формуле $\sqrt{x^2} = |x|$ получим $\frac{|a - \sqrt{3}|}{\sqrt{3} - a} + \frac{|a + \sqrt{3}|}{\sqrt{3} + a}$. По условию $|a| < 1$, поэтому раскроем модули так $\frac{\sqrt{3} - a}{\sqrt{3} - a} + \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + a} = 1 + 1 = 2$.

Ответ: 2.

2. (2 балла) Найдите наибольший корень уравнения

$$x^2 + \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{x^2 - 3}{x - 2}.$$

Решение. Заметим в знаменателе второй дроби формулу квадрата разности

$$x^2 + \frac{x - 2}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 3}{x - 2}.$$

Область допустимых значений этого уравнения все $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 2$, поэтому сократим на $x - 2$, а затем преобразуем при $x \neq 2$:

$$x^2 + \frac{1}{x - 2} = \frac{x^2 - 3}{x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = x^2 - 3 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x^2 + 4 = 0.$$

Сгруппируем попарно

$$(x^3 + x^2) - 4(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 1) - 4(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 4) = 0.$$

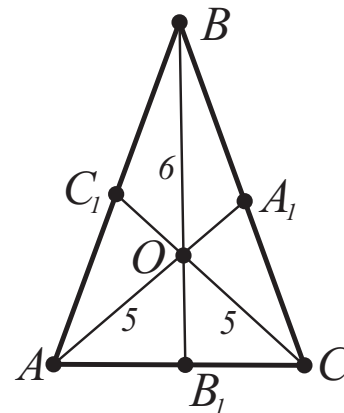
Отсюда получаем $x = -1$ и $x = 2$, но $x = 2$ – посторонний корень по ОДЗ.

Ответ: -1 .

3. (2 балла) Медианы равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке O , $AO = 5$, $BO = 6$. Найдите площадь треугольника ABC .

Решение. По свойству медиан $BO : OB_1 = 2 : 1$ получим $OB_1 = 3$, тогда по теореме Пифагора $AB_1 = 4$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36.$$



Ответ: 36.

4. (2 балла) Ежедневно маленькая Тася съедает по 3 или 4 конфеты. За сколько дней она могла съесть ровно 23 конфеты?

Решение. Путем перебора убеждаемся, что возможны только 2 варианта представления числа 23:

1) $23 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1$, тогда Тасе понадобилось 6 дней,

2) $23 = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5$, что соответствует 7 дням.

Ответ: 67.

5. (2 балла) Найдите длину стороны AB треугольника ABC , если известно, что $\angle A = 135^\circ$, $AC = 2\sqrt{2}$ и $BC = \sqrt{29}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC получаем

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle A,$$

$$29 = 8 + AB^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot AB \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

После упрощений получим квадратное уравнение $AB^2 + 4AB - 21 = 0$, корнями которого являются числа 3 и -7 . Так как длина стороны не может быть отрицательной, то $AB = 3$.

Ответ: 3.

6. (2 балла) Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{(x-2)(x-5)}{(x+2)(x+5)} \leq \frac{x+6}{x-6}.$$

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю:

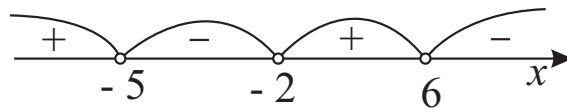
$$\frac{(x^2 - 7x + 10)(x - 6) - (x + 6)(x^2 + 7x + 10)}{(x + 2)(x + 5)(x - 6)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-26x^2 - 120}{(x + 2)(x + 5)(x - 6)} \leq 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов:

Получим, что $x \in (-5; -2) \cup (6; +\infty)$.

Тогда наименьшим целым числом из этого объединения промежутков будет -4 .

Ответ: -4 .



7. (2 балла) Найдите собственную скорость лодки, если известно, что за 5 часов она прошла по реке 20 км и вернулась назад, и скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение. Пусть x км/ч – собственная скорость лодки.

Составим уравнение $\frac{20}{x+3} + \frac{20}{x-3} = 5$. Преобразуем его при $x \neq \pm 3$ следующим образом

$$20 \cdot \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} \right) = 5 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{2x}{x^2-9} = 1 \Leftrightarrow 8x = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 9.$$

Скорость не может быть отрицательной, поэтому $x = -1$ не подходит.

Ответ: 9.

8. (3 балла) Найдите площадь четырехугольника, ограниченного осями координат и прямыми $2x + y = -7$ и $4x + 2y + 10 = 0$.

Решение. Изобразим множество точек, ограниченное осями координат и двумя прямыми: $y = -2x - 7$ и $y = -2x - 5$.

$$S_{ABCD} = S_{AOD} - S_{BOC} = \frac{49}{4} - \frac{25}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

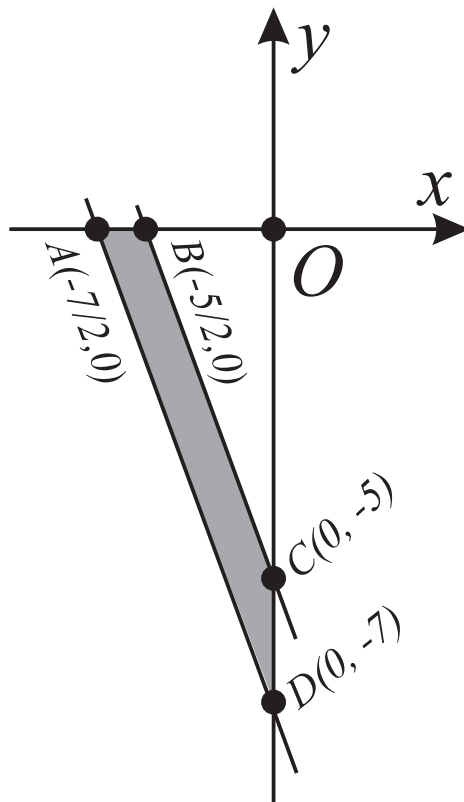
Ответ: 6.

9. (3 балла) При каком наибольшем значении a графики функций

$$y = \frac{x^3 - x|x-2|}{x}$$

и $y = a$ имеют ровно одну общую точку?

Решение. Построим график функции $y = \frac{x^3 - x \cdot |x-2|}{x}$, $x \neq 0$.



Для этого сначала раскроем модуль:

$$\left[\begin{cases} x \geq 2, \\ y = \frac{x^3 - x(x-2)}{x} = x^2 - x + 2, \\ x < 0, \quad 0 < x < 2, \\ y = \frac{x^3 + x(x-2)}{x} = x^2 + x - 2. \end{cases} \right.$$

Затем найдем координаты вершин двух парабол

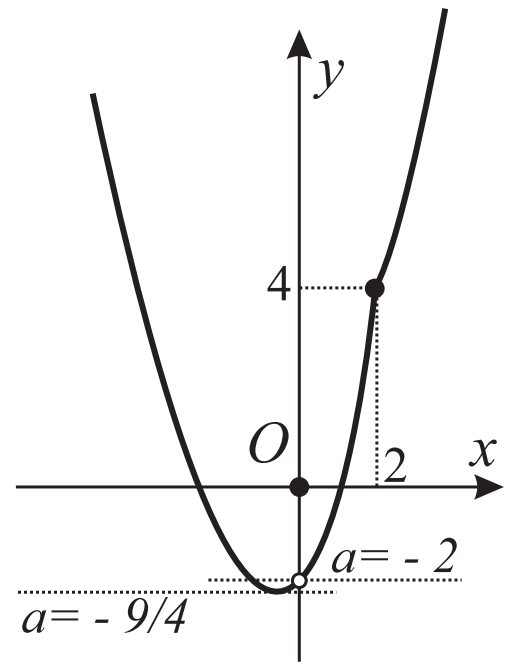
Для $y = x^2 - x + 2$: $x_0 = 1/2$, $y_0 = y(1/2) = 7/4$, но эта вершина не попадает в область $x \geq 2$.

Для $y = x^2 + x - 2$ аналогично находим координаты $x_0 = -1/2$, $y_0 = y(-1/2) = -9/4$.

При $x < 2$ график функции совпадает с параболой $y = x^2 + x - 2$, причем точка $(0, -2)$ не принадлежит графику согласно ОДЗ; при $x \geq 2$ график функции совпадает с параболой $y = x^2 - x + 2$.

Прямая $y = a$ имеет с построенным графиком ровно одну точку при $a = -9/4$ и $a = -2$, поэтому наибольшее значение a равно -2 .

Ответ: -2 .



Часть 2 (продолжительность 2 часа)

Приведите полные решения к заданиям этой части. Файлы с фотографиями текста решений прикрепите к соответствующему заданию.

10. (5 баллов) Решите уравнение

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Решение. Добавим и вычтем 1 в подкоренных выражениях. Получим формулы квадрата суммы и квадрата разности.

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = 2,$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 2.$$

Используя тождество $\sqrt{x^2} = |x|$, получим уравнение

$$|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + |\sqrt{x-1}-1| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|\sqrt{x-1}-1| = 1 - \sqrt{x-1}.$$

Это равенство выполняется при $\sqrt{x-1}-1 \leq 0$. Тогда

$$\sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Ответ: $x \in [1; 2]$.

11. (8 баллов) Для изготовления дезинфицирующего раствора купили 20 литровую бутылку чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд обратно долили водой. Некоторое время спустя из бутылки вновь отлили столько же литров смеси, что и в первый раз, и вновь разбавили смесь, долив сосуд водой. После этого оказалось, что чистого спирта в бутылке втрое меньше, нежели воды. Сколько спирта отлили из сосуда в первый раз?

Решение. Обозначим количество отливаемой жидкости за x . Тогда после первого переливания в сосуде останется $20 - x$ литров и процентное содержание спирта в растворе составит $\frac{20-x}{20} \cdot 100\%$. При повторном переливании спирта в сосуде останется

$$20 - x - x \frac{20-x}{20} = \frac{(20-x)20 - x(20-x)}{20} = \frac{(20-x)^2}{20} \text{ литров.}$$

Заметим, что раз в емкости осталось чистого спирта втрое меньше воды, то спирт составляет четверть объема раствора, то есть 5 литров.

Получим уравнение $\frac{(20-x)^2}{20} = 5$, $(20-x)^2 = 100$, откуда $20-x = \pm 10$.

Получим $x_1 = 10$, $x_2 = 30$, но из двадцатилитровой емкости нельзя отлить 30 литров, поэтому количество отлитого спирта составляет 10 литров.

Ответ: 10 литров.

12. (10 баллов) Около треугольника ABC описана окружность. Прямая BO , где O — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

1) Докажите, что $OP = AP$.

2) Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

Решение. 1) Обозначим величины углов: $\angle BAO = \alpha$, $\angle ABO = \beta$.

$\angle CAO = \alpha$, $\angle CBO = \beta$, так как центр вписанной окружности O является точкой пересечения биссектрис.

Тогда $\angle CBO = \angle CBP = \widehat{PC}/2$, $\angle CAP = \widehat{PC}/2$, поэтому справедливо $\angle CAP = \beta$.

Из треугольника ABO найдем внешний угол: $\angle AOP = \alpha + \beta$. Тогда справедливо $\angle AOP = \angle PAO = \alpha + \beta$, значит, треугольник APO равнобедренный и $AP = PO$.

2) Зная, что $\angle ABP = \angle PBC$, получаем, что P — середина дуги AC .

Проведем из точки P перпендикуляр PH к AC . По условию $\angle ABC = 120^\circ = 2\beta$, тогда $\angle CAP = \angle ACP = \beta = 60^\circ$ и треугольник APC равносторонний.

Из теоремы синусов для треугольника ABC найдем AC :

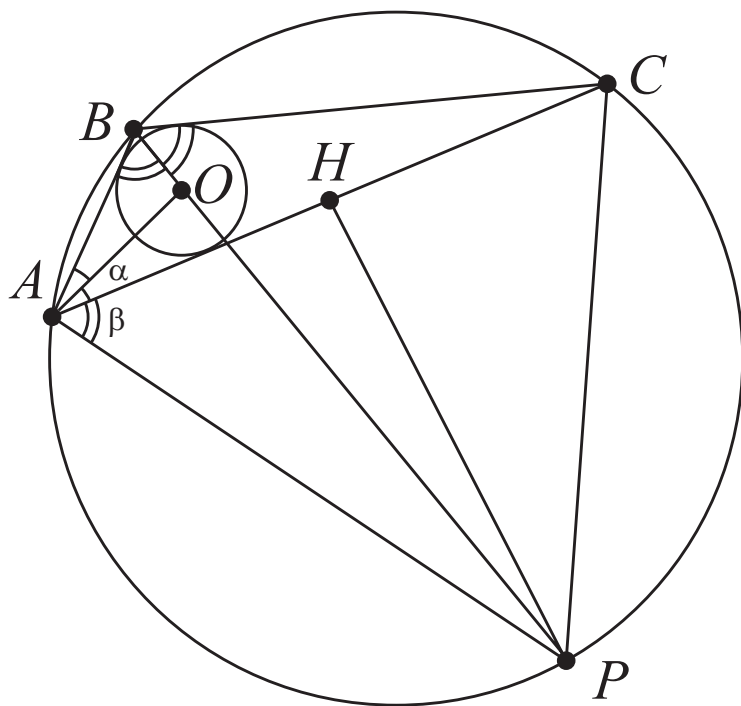
$$\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = 2R \Rightarrow \frac{AC}{\sin 120^\circ} = 2R,$$

$$AC = 2 \cdot 18 \sin 120^\circ = 2 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Тогда $AN = 9\sqrt{3}$, $HP = AN \operatorname{tg} 60^\circ$, $HP = 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 27$.

Ответ: 27.

13. (7 баллов) Три положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Если среднее из них уменьшить на 40%, то полу-



чится три последовательных числа геометрической прогрессии, сумма которых равна 39. Найдите среднее число.

Решение. Пусть числа a , $a + d$, $a + 2d$ составляют данную арифметическую прогрессию.

Если уменьшить $a + d$ на 40%, то получим $0,6(a + d)$.

Тогда числа a , $0,6(a + d)$, $a + 2d$ составляют геометрическую прогрессию, причем их сумма равна 39. Получаем уравнение

$$a + 0,6(a + d) + a + 2d = 39,$$

$$2,6a + 2,6d = 39,$$

$$a + d = 15.$$

Тогда среднее число $a + d$ равно 15.

Ответ: 15.