СУНЦ УрФУ, 2020 год
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 10 физико-математический и
10 физико-технический классы

Часть 1 (продолжительность 1,5 часа)

Введите ответы на задания в отведенные поля. Обратите внимание, что ответами могут быть лишь целые числа или конечные десятичные дроби (целая и десятичная часть в этом случае разделяются запятой). В случае, если ответов в задании получилось несколько, укажите их все в порядке возрастания, без пробелов, запятых или иных разделителей (например, если получились ответы -1 и $2,5$, то внести в поле ответа следует $-12,5$). Дополнительной литературой, калькулятором, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя. Знаки градуса, процентов и единицы измерения в ответе писать НЕ нужно.

1. *(2 балла)* Упростите выражение

$$\left(\left(\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot a^2.$$

Решение. Преобразуем выражение

$$\left(\left(\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot a^2=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2}}\right)\cdot a^2=$$

$$=\left(\frac{1}{|\sqrt{a^2+1}+1|}-\frac{1}{|\sqrt{a^2+1}-1|}\right)\cdot a^2.$$

Заметим, что $\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)$ и $\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)$ всегда неотрицательные, поэтому $|\sqrt{a^2+1}+1|=\sqrt{a^2+1}+1$ и $|\sqrt{a^2+1}-1|=\sqrt{a^2+1}-1$.

Отсюда наше выражение равно

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-1}\right)\cdot a^2.$$

Приведем к общему знаменателю и раскроем скобки

$$\frac{\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)-\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)}\cdot a^2=\frac{-2}{(a^2+1)-1}\cdot a^2=\frac{-2}{a^2}\cdot a^2=-2.$$

Ответ: -2.

2. *(2 балла)* Решите уравнение

$$7^{x+1}-7^x+7^{x-1}=43.$$

Решение. Воспользуемся свойствами степеней и упростим левую часть уравнения

$$7^2 \cdot 7^{x-1} - 7 \cdot 7^{x-1} + 7^{x-1} = 43,$$

$$49 \cdot 7^{x-1} - 7 \cdot 7^{x-1} + 7^{x-1} = 43,$$

$$(49 - 7 + 1) \cdot 7^{x-1} = 43,$$

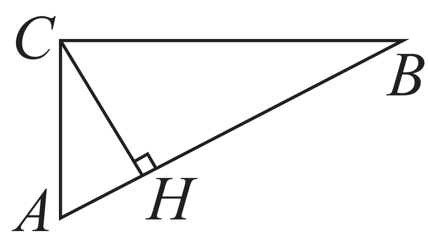
$$43 \cdot 7^{x-1} = 43,$$

$$7^{x-1} = 1.$$

Так как $1 = 7^0$, то $x - 1 = 0$, откуда $x = 1$.

Ответ: 1.

3. *(2 балла)* Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если длина одного из его катетов 8 см, а высота, проведенная к гипотенузе равна $4\sqrt{3}$ см.



Решение. Пусть в треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $CH = 4\sqrt{3}$. Найдем длину AB.

1 способ. По теореме Пифагора $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 64 - 48 = 16$, откуда $AH = 4$.

По свойству высоты прямоугольного треугольника $CH^2 = AH \cdot BH$, подставим значения $48 = 4 \cdot BH$, откуда $BH = 12$.

Найдем гипотенузу $AB = AH + BH = 4 + 12 = 16$.

2 способ. $\triangle ACH \sim \triangle ABC$ (по двум углам), поэтому $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{AC}$.

По теореме Пифагора $AH = 4$, значит, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, поэтому $AB = 2AC = 16$.

Ответ: 16.

4. *(2 балла)* На консультации присутствовали учитель Тамара Леонидовна и несколько учеников. Известно, что возраст Тамары Леонидовны на 24 года больше среднего возраста учеников и на 21 год больше среднего возраста всех присутствующих в классе. Сколько человек (включая учителя) было на консультации?

Решение. Предположим, что на консультации присутствовали n учеников, а их средний возраст равен x.

Тогда с одной стороны возраст учителя равен $x+24$, а с другой $\dfrac{(x+24)+n \cdot x}{n+1}+21$.

Решим уравнение:

$$x + 24 = \frac{(x+24)+n \cdot x}{n+1} + 21,$$

$$(x+3)(n+1) = (x+24) + nx,$$

$$xn + 3n + x + 3 = x + 24 + nx,$$

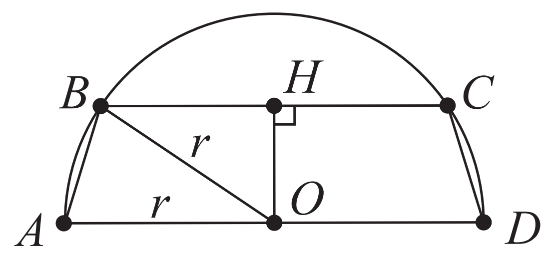
$$3n = 21,$$

$$n = 7.$$

Таким образом, на консультации было 8 человек, включая учителя.

Ответ: 8.

5. *(2 балла)* Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее основания равны 10 и 8, а центр описанной окружности лежит на большем основании.



Решение. Так как центр окружности лежит на большем основании трапеции, то ее радиус равен 5: $R = AO = BO = 5$.

Проведем высоту трапеции OH, H — середина BC. В прямоугольном треугольнике BOH выполняется $BO = 5$, $BH = 4$, тогда $OH = 3$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot OH = \frac{18}{2} \cdot 3 = 27.$$

Ответ: 27.

6. *(2 балла)* Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{25}{x^2 - 3x} \geqslant x^2 - 3x.$$

Решение. Перенесем правую часть неравенства налево и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{25}{x^2 - 3x} - (x^2 - 3x) \geqslant 0,$$

$$\frac{25 - (x^2 - 3x)^2}{x^2 - 3x} \geqslant 0.$$

Преобразуем числитель по формуле разности квадратов:

$$\frac{\left(5 - (x^2 - 3x)\right)\left(5 + (x^2 - 3x)\right)}{x^2 - 3x} \geqslant 0,$$

$$\frac{-(x^2 - 3x - 5)(x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 3x} \geqslant 0.$$

Для решения неравенства воспользуемся методом интервалов. Найдем корни числителя.

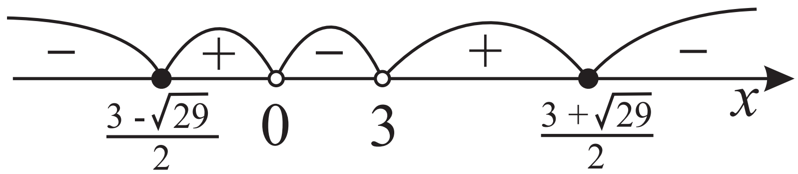
$$(x^2 - 3x - 5)(x^2 - 3x + 5) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 5 = 0, \\ x^2 - 3x + 5 = 0. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}, \\ \varnothing \quad (\text{ поскольку } D < 0). \end{array}\right.$$

ОДЗ неравенства $x^2 - 3x \neq 0$, поэтому $x \neq 0$ и $x \neq 3$.

Отметим полученные значения на числовой оси и расставим знаки левой части на промежутках.



Решение неравенства $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}; 0\right) \cup \left(3; \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\right]$.

Найдем наибольшее целое решение неравенства:

$$5 < \sqrt{29} < 7,$$

$$8 < 3 + \sqrt{29} < 10,$$

$$3 < 4 < \frac{3+\sqrt{29}}{2} < 5.$$

Следовательно, ответом к заданию будет число 4.

Ответ: 4.

7. *(2 балла)* В лаборатории имелись два раствора кислоты различной концентрации. Когда 55 л первого раствора смешали с 20 л второго, получили новый раствор кислоты с концентрацией 68%. Определите, какова была концентрация кислоты в первом растворе, если известно, что при смешивании начальных растворов в равных долях, получился бы 75% раствор кислоты.

Решение. Предположим, что концентрации первого и второго растворов равны $x\%$ и $y\%$ соответственно.

Согласно первому условию получим $\dfrac{55x + 20y}{75} = 68$, а при смешивании растворов в равных долях $\dfrac{x+y}{2} = 75$. Приходим к системе:

$$\left\{\begin{array}{l} 55x + 20y = 75 \cdot 68, \\ x + y = 150, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 11x + 4y = 15 \cdot 68, \\ 4x + 4y = 15 \cdot 10 \cdot 4. \end{array}\right.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$7x = 15 \cdot 68 - 15 \cdot 40 = 15 \cdot 28,$$

$$x = 15 \cdot 4 = 60.$$

Ответ: 60.

8. *(3 балла)* Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y + x = 0$, $y - x - 4 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$.

Решение. Найдем вершины этого треугольника — точки попарного пересечения прямых.

$$A : \begin{cases} y + x = 0, \\ y - x - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A(-2, 2).$$

$$B : \begin{cases} y + x = 0, \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow B(4, -4).$$

$$C : \begin{cases} y - x - 4 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow C(0, 4).$$

Вычислим длины сторон треугольника ABC по формуле вычисления расстояния между двумя точками.

$$AB = \sqrt{(-2-4)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$
$$AC = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$
$$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Заметим, что $BC^2 = AB^2 + AC^2$, значит, треугольник ABC прямоугольный. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 12.$$

Ответ: 12.

9. *(3 балла)* Найдите наименьшее значение параметра b, при котором график функции $y = 2x^2 + bx + c$ проходит через точку $(0, 2)$ и касается оси Ox.

Решение. Графиком квадратичной функции $y = 2x^2 + bx + c$ является парабола. По условию задачи она должна проходить через точку $(0, 2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение функции и получим $2 = 2 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ или $c = 2$.

Продолжим искать параметр b для функции $y = 2x^2 + bx + 2$, используя условие касания параболы с осью Ox.

Парабола касается Ox тогда, когда ее вершина лежит на оси абсцисс. Для этого уравнение $2x^2 + bx + 2 = 0$ должно иметь единственное решение, тогда дискриминант уравнения $D = b^2 - 16$ будет равен 0. Получаем два подходящих значения $b_1 = -4$ и $b_2 = 4$. В задаче требуется найти наименьшее значение, значит, $b = -4$.

Ответ: -4.

Часть 2 (продолжительность 2 часа)

Приведите полные решения к заданиям этой части. Файлы с фотографиями текста решений прикрепите к соответствующему заданию.

10. *(5 баллов)* Решите уравнение

$$\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-1}=1.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделив полный квадрат под знаком радикала

$$\sqrt{(x+1)+(x-1)-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=1,$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}+\sqrt{x-1}=1,$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}+\sqrt{x-1}=1,$$

$$|\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}|+\sqrt{x-1}=1.$$

Поскольку $\sqrt{x+1}>\sqrt{x-1}$ при любом $x\geqslant 1$, то

$$|\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}|=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}.$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=1.$$

Осталось решить уравнение $\sqrt{x+1}=1$ при ОДЗ $x\geqslant 1$.

$$x+1=1,$$

$$x=0,$$

но этот корень не попадает в ОДЗ.

Ответ: решений нет.

11. *(8 баллов)* Сергей и Кирилл собрались посетить семинар на базе отдыха. Кирилл живет в 46 км от базы, а Сергей, имеющий машину, — в 30 км от базы (между базой и домом Кирилла). Они двинулись в путь одновременно, причем владелец машины поехал навстречу приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы Кирилл вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше Сергея, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Скорости пешехода и автомобиля считать постоянными, временем на остановку можно пренебречь. Определите скорость машины.

Решение. Положим, что скорость автомобиля Сергея x км/ч, скорость ходьбы Кирилла y км/ч.

Запишем первое условие задачи. Так как приятели отправились навстречу друг другу одновременно, то до встречи они будут двигаться $\dfrac{16}{x+y}$ часов. Отметим, что после поворота автомобиля в сторону базы отдыха, Сергею предстоит преодолеть обратное расстояние от точки встречи до своего дома и дальше еще 30 км до базы. На это он затратит $\dfrac{16}{x+y}+\dfrac{30}{x}$ часов. Итого весь путь приятелей до базы займет $\dfrac{16}{x+y}+\dfrac{16}{x+y}+\dfrac{30}{x}$, что составляет один час по условию задачи.

Воспользуемся вторым условием. За 2 часа 40 минут, или $\dfrac{8}{3}$ часа, Кирилл пройдет расстояние $\dfrac{8}{3}y$ км, значит к моменту начала движения Сергея между приятелями будет дистанция в $16-\dfrac{8}{3}y$ км. Этот путь они совместно преодолеют за $\dfrac{16-\frac{8}{3}y}{x+y}$ часов, причем автомобиль Сергея успеет проехать всего $16-11=5$ км. Получаем уравнение

$$\frac{16-\frac{8}{3}y}{x+y}=\frac{5}{x}.$$

Далее решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{16}{x+y}+\dfrac{30}{x}=1, \\ \dfrac{16-\frac{8}{3}y}{x+y}=\dfrac{5}{x}. \end{cases}$$

Выразим $\dfrac{30}{x}$ из обоих уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{30}{x}=1-\dfrac{32}{x+y}, \\ \dfrac{30}{x}=\dfrac{6\left(16-\frac{8}{3}y\right)}{x+y}=\dfrac{6\cdot 16}{x+y}-\dfrac{16}{x+y}\cdot y. \end{cases}$$

Приравняем выражения:

$$1-\frac{32}{x+y}=\frac{6\cdot 16}{x+y}-\frac{16}{x+y}\cdot y \Leftrightarrow \frac{128}{x+y}-\frac{16}{x+y}\cdot y=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{128-16y}{x+y}=1 \Leftrightarrow x+y=128-16y \Leftrightarrow x=128-17y.$$

Поскольку по условию задачи нам нужно найти x, то выразим $y = \dfrac{128 - x}{17}$ и подставим в первое уравнение системы:

$$\frac{30}{x} = 1 - \frac{32}{x + \dfrac{128 - x}{17}} \Leftrightarrow \frac{30}{x} = 1 - \frac{32 \cdot 17}{17x + 128 - x} \Leftrightarrow \frac{30}{x} = 1 - \frac{32 \cdot 17}{128 + 16x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{30}{x} = 1 - \frac{2 \cdot 17}{8 + x} \Leftrightarrow 30(x + 8) = x(x + 8) - 34x \Leftrightarrow x^2 - 56x - 240 = 0.$$

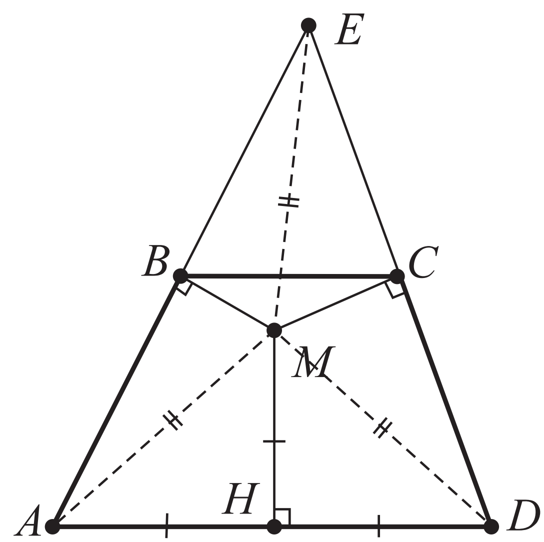
Из квадратного уравнения находим $x_1 = -4$ и $x_2 = 60$. Поскольку скорость машины не может быть отрицательной, она равна 60 км/ч.

Ответ: 60 км/ч.

12. *(10 баллов)* Дана трапеция $ABCD$, в которой основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что $\angle ABM = \angle DCM = 90°$.

1) Докажите, что $AM = MD$.

2) Найдите $\angle BAD$, если $\angle ADC = 70°$, а расстояние от точки M до стороны AD вдвое меньше AD.



Решение. 1) Достроим трапецию до треугольника, продлив боковые стороны AB и CD до пересечения в точке E. Тогда выполняется $\triangle AED \sim \triangle BEC$ (по двум углам), причем коэффициент подобия равен 2, так как $AD = 2BC$. Значит, точки B и C — середины отрезков AE и DE соответственно, а BM и CM – серединные перпендикуляры. Отсюда M — точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника AED, следовательно, точка M — центр окружности, описанной около треугольника AED и она равноудалена от точек A, E и D.

2) Построим MH — расстояние от M до AD, по условию $MH = AD/2$. По пункту (1) M — точка пересечения серединных перпендикуляров, значит, H – середина AD. Получаем $MH = AD/2 = HD = AH$.

Треугольники AMH и DMH равнобедренные и прямоугольные, следовательно $\angle DAM = \angle ADM = 45°$. Поэтому $\angle CDM = \angle ADC - \angle ADM = 70° - 45° = 25°$.

Треугольники DEM и AEM равнобедренные по пункту (1), значит, выполняется $\angle CDM = \angle CEM = 25°$, $\angle BAM = \angle BEM = x$.

Сумма углов в треугольнике ADE равна $180°$. Получим $2x + 2 \cdot 25° + 2 \cdot 45° = 180°$, $\angle BAM = 20°$ и $\angle BAD = \angle BAM + \angle DAM = 20° + 45° = 65°$.

Ответ: $65°$.

13. *(7 баллов)* Елена Михайловна сочиняла задания для своих учеников на тему дробно-рациональные уравнения. Она подобрала такое число a, что уравнение

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{4}{3a}$$

одним из корней имеет число 1. Какое число является вторым корнем этого уравнения?

Решение. Найдем значение a, подставив $x=1$ в уравнение:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}=\frac{4}{3a}.$$

Перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2}{1-a^2}-\frac{4}{3a}=0 \Leftrightarrow \frac{4a^2+6a-4}{3a(1-a^2)}=0 \Leftrightarrow 2a^2+3a-2=0.$$

Получим $a_1=-2$ и $a_2=1/2$.

При $a=-2$: $\quad \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{4}{6}, \quad x^2+3x-4=0, \quad x_1=1,\ x_2=-4.$

При $a=1/2$: $\quad \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{\frac{3}{2}}, \quad 4x^2-3x+1=0, \quad x_1=1,\ x_2=-\dfrac{1}{4}.$

Ответ: -4 или $-\dfrac{1}{4}$.