Задачи для тестовой части выделены красным цветом.

Во всех задачах ответ даётся в единицах СИ без приставок (милли, Мега и т. п.) в виде десятичной дроби, округлённой до определённого знака.

Ответы к вопросам приведены в каждом пункте в скобках

10 класс

1. Вверх и вниз (7 баллов)

Два тела начали одновременно двигаться вдоль одной вертикальной прямой: первое – с поверхности земли с начальной скоростью $10\frac{\text{м}}{\text{с}}$, второе – без начальной скорости с высоты $40\ \text{м}$. Ускорение свободного падения $10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, сопротивлением воздуха пренебречь.

Найдите:

- Время полёта первого тела (1 балл); Ответ дать в виде целого числа (2).
- Время полёта второго тела (1балл); Ответ округлить до десятых (2,8)
- Высоту, на которую поднялось первое тело (1 балл); Ответ дать в виде целого числа (5).
- Модуль скорости второго тела в момент соприкосновения с землёй (1 балл); Ответ округлить до целых (28)
- Среднюю путевую скорость первого тела (1 балл); Ответ дать в виде целого числа (5)
- Среднюю путевую скорость второго тела (1 балл); Ответ округлить до целых (14)
- Координату первого тела через 0,5с после начала движения (1 балл). Ответ округлить до целых (4)

Решение:

- Направим ось OX вверх, начало отсчёта возьмём на уровне земли. Тогда зависимость координаты первого тела от времени

$$x = 10t - \frac{10t^2}{2} \qquad \text{(формула 1)}$$

Когда тело вернётся на землю, координата станет равной нулю. Подставив $x = 0$ можно найти момент времени, когда тело будет в этой точке,

$$0 = 10t_1 - \frac{10t_1^2}{2}$$

Получим два значения $t_1 = 0$ и $t_1 = 2$с. В эти моменты времени первое тело было на уровне земли. Нас интересует время полёта, поэтому ответ

$$t_1 = 2\text{с}$$

(1 балл)

- Зависимость координаты второго тела от времени

$$x = 40 - \frac{10t^2}{2}$$

Когда второе тело упадёт на землю, координата станет равной нулю. Подставим x = 0 и найдём момент времени, когда тело будет в этой точке,

$$0 = 40 - \frac{10t_2^2}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{8} \approx 2{,}8c$$

(1 балл)

- Зависимость скорости первого тела от времени

$$v = 10 - 10t$$

В верхней точке траектории скорость тела равна нулю, найдём время подъёма,

$$0 = 10 - 10t_3$$

$$t_3 = 1c$$

Подставим это время в формулу 1 и найдём высоту подъёма

$$h_1 = 10 \cdot 1c - \frac{10 \cdot (1c)^2}{2} = 5\text{м}$$

(1 балл)

- Зависимость проекции скорости второго тела от времени

$$v = -10t$$

Подставим время полёта второго тела и найдём проекцию скорости

$$v = -10 \cdot 2{,}8 = -28\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Модуль скорости $28\frac{\text{м}}{\text{с}}$

(1 балл)

- Средняя путевая скорость первого тела находится как пройденный путь, делённое на затраченное время

$$v_1 = \frac{10\text{м}}{2\text{с}} = 5\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

(1 балл)

- Средняя путевая скорость второго тела

$$v_2 = \frac{40\text{м}}{2{,}8\text{с}} \approx 14\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

(1 балл)

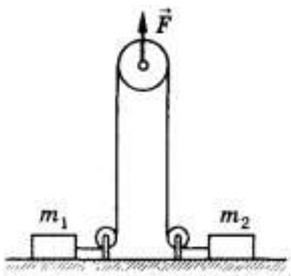
- Подставим в формулу 1 время 0,5 с

$$x_1 = 10 \cdot 0{,}5c - \frac{10 \cdot (0{,}5c)^2}{2} \approx 4\text{м}$$

(1 балл)

2. Тянем – потянем (6 баллов)

В системе, изображённой на рисунке, грузы имеют массы $m_1 = 1{,}0\text{кг}$ и $m_2 = 2{,}0\text{кг}$. Нить и блоки невесомы, трение в осях блоков отсутствует. Коэффициенты трения грузов о плоскость равны $\mu_1 = 0{,}50$ и $\mu_2 = 0{,}30$ соответственно. В начальный момент времени на ось верхнего блока начинает действовать сила $F = 12\text{ Н}$, направленная вертикально вверх. Ускорение свободного падения $10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

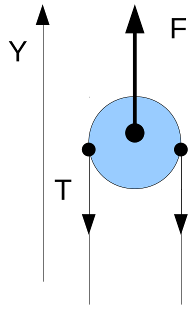


Найдите:

- Силу натяжения нити (1 балл); Ответ округлить до целых (6)
- Максимальную силу трения покоя, действующую на первое тело (1 балл); Ответ округлить до целых (5)
- Максимальную силу трения покоя, действующую на второе тело (1 балл); Ответ округлить до целых (6)
- Ускорение первого тела (1 балл); Ответ округлить до целых (1)
- Ускорение второго тела (1 балл); Ответ округлить до целых (0)
- На сколько уменьшится расстояние между грузами за 0,20с после начала действия силы F? (1 балл). Ответ округлить до сотых (0,02)

Решение:

- Так как нить невесома, натяжение вдоль всей нити имеет одно и то же значение. Удобнее найти силу натяжения, рассмотрев подвижный блок. На блок действуют внешняя сила $\vec{F}$, сила $\vec{T}$ натяжения нити. По второму закону Ньютона



$$\vec{F} + 2\vec{T} = m\vec{a} = 0$$

Так как блок невесом, его массу m считаем равной нулю.

В проекциях на ось Y получаем

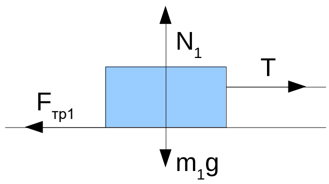
$$F - 2T = 0 \qquad F = 2T$$

$$T = \frac{F}{2}$$

$$T = \frac{12\text{Н}}{2} = 6{,}0\ \text{Н}$$

(1 балл)

- Максимальная сила трения покоя равна силе трения скольжения

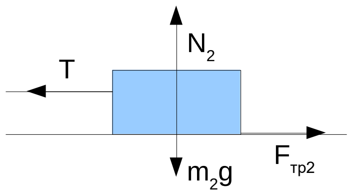


$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g$$

$$F_{\text{тр}1} = 0{,}50 \cdot 1{,}0\text{кг} \cdot 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 5{,}0\text{Н}$$

(1 балл)

- Аналогично найдём максимальную силу трения покоя для второго тела



$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

$$F_{\text{тр}2} = 0{,}30 \cdot 2{,}0\text{кг} \cdot 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 6{,}0\text{Н}$$

(1 балл)

- Запишем для первого тела второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось

$$T - F_{\text{тр}1} = m_1 a_1$$

$$6{,}0\text{Н} - 5{,}0\text{Н} = 1{,}0\text{кг} \cdot a_1$$

Ускорение первого тела

$$a_1 = 1{,}0\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

(1 балл)

- Запишем для второго тела второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось

$$T - F_{\text{тр}2} = m_2 a_2$$

$$6{,}0\text{Н} - 6{,}0\text{Н} = 2{,}0\text{кг} \cdot a_2$$

Ускорение второго тела

$$a_2 = 0$$

(1 балл)

- Так как первое тело двигается, а второе покоится, то за данный промежуток времени расстояние между телами уменьшится ровно на столько, сколько пройдёт первое тело

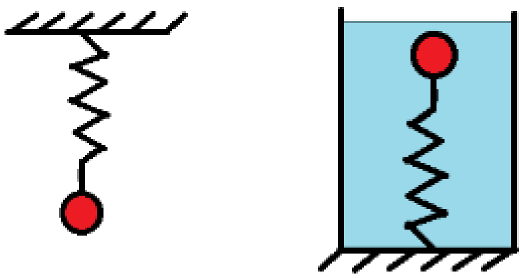
$$S = \frac{a_1 t^2}{2}$$

$$S = \frac{1,0\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (0,20\text{с})^2}{2} = 0,02\text{м}$$

(1 балл)

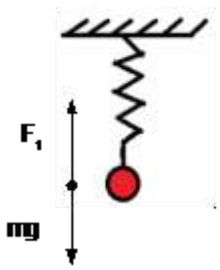
3. Шарик и вода (5 баллов)

Шарик, подвешенный на пружине, растягивает её на $x_1 = 1{,}5\ \text{см}$. Если этот шарик на этой же пружине поместить в сосуд с водой, прикрепив другой конец пружины к дну сосуда, пружина растянется $x_2 = 0{,}50$ см. Плотность воды $\rho_\text{в} = 1{,}0 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Выталкивающей силой в воздухе пренебречь.



- ➢ Изобразить силы, действующие на шарик в воздухе (0,5 балла);
- ➢ Изобразить силы, действующие на шарик в воде (0,5 балла);
- ➢ Запишите условие равновесия шарика в воздухе (0,5 балла);
- ➢ Запишите условия равновесия шарика в воде (0,5 балла);
- ➢ Найдите плотность шарика (3 балла).

Решение:

- 

На шарик в воздухе действуют сила $m\vec{g}$ тяжести, направленная вниз и сила $\vec{F}_1$ упругости пружины, направленная вверх

(0,5 балла)

- Равновесие шарика в воздухе

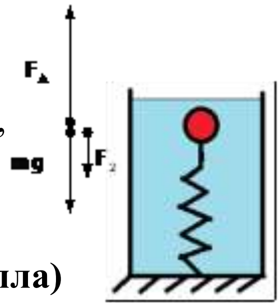
$$m\vec{g} + \vec{F}_1 = 0$$

В проекциях на ось ОХ (ось направлена вверх)

$$-mg + F_1 = 0$$

(0,5 балла)

-



На шарик в воде действуют сила $m\vec{g}$ тяжести, направленная вниз; сила $\vec{F}_2$ упругости пружины, направленная вниз; сила $\vec{F}_А$ Архимеда, направленная вверх.

(0,5 балла)

- Равновесие шарика в воздухе

$$m\vec{g} + \vec{F}_2 + \vec{F}_А = 0$$

В проекциях на ось ОХ (ось направлена вверх)

$$-mg - F_2 + F_А = 0$$

(0,5 балла)

- Запишем снова условия равновесия тела в воздухе и в воде

$$-mg + F_1 = 0$$

$$-mg - F_2 + F_А = 0$$

(1 балл)

Заменим обе силы упругости пружины через закон Гука

$$-mg + kx_1 = 0$$

$$-mg - kx_2 + F_А = 0,$$

где k - коэффициент упругости пружины.

Выразим массу тела через плотность ρ тела, силу Архимеда запишем как $\rho_в gV$, где V - объём шарика

$$-\rho Vg + kx_1 = 0$$

$$-\rho Vg - kx_2 + \rho_в gV = 0.$$

(1 балл)

Выразим жёсткость пружины из первого уравнения

$$k = \frac{\rho Vg}{x_1}$$

Подставим во второе и найдём плотность тела

$$\rho = \frac{\rho_в}{1 + \frac{x_2}{x_1}}$$

$$\rho = \frac{1{,}0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{1 + \frac{0{,}50\text{см}}{1{,}5\text{см}}} = 750 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

(1 балл)

4. Два спутника одной планеты (5 баллов)

Вокруг неизвестной планеты по окружностям на разных высотах двигаются два спутника. Отношение центростремительных ускорений спутников $\frac{a_1}{a_2} = 4$.

- Чему равно отношение $\frac{r_1}{r_2}$ радиусов орбит спутников (1 балл); Ответ округлить до десятых (0,5)
- Чему равно отношение $\frac{v_1}{v_2}$ линейных скоростей спутников (1 балл); ответ округлить до десятых (1,4)
- Найдите зависимость периода обращения спутника от высоты над поверхностью планеты. Считать известными радиус и плотность планеты (3 балла).

Решение:

- При движении спутника на него действует единственная сила – сила тяготения со стороны планеты, которая сообщает ему центростремительное ускорение. Запишем для спутника второй закон Ньютона в проекциях на ось, совпадающую с радиусом орбиты

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = ma$$

где G - гравитационная постоянная, m - масса спутника, M - масса планеты, r - радиус орбиты спутника, v - скорость спутника, a - центростремительное ускорение спутника.

Выразим ускорение каждого спутника

$$a_1 = G\frac{M}{r_1^2}, \quad a_2 = G\frac{M}{r_2^2}.$$

Поделим первое уравнение на второе и выразим отношение радиусов орбит

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = 4$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$$

(1 балл)

- Вернёмся к первому уравнению и выразим из него скорость каждого спутника
$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{r_1}}, \quad v_2 = \sqrt{G\frac{M}{r_2}}.$$
Найдём отношение скоростей
$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$$

(1 балл)

- Заменим радиус орбиты через радиус R планеты и высоту h орбиты над поверхностью $r = R + h$, массу планеты выразим через плотность и объём $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$, а скорость – через путь и время одного оборота $v = \frac{2\pi r}{T}$. Подставим все величины в первое уравнение и выразим период вращения T
$$G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{R + h} = \left(\frac{2\pi(R + h)}{T}\right)^2$$

(1 балл)

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho} \cdot \left(\frac{R+h}{R}\right)^3}$$

(2 балла)

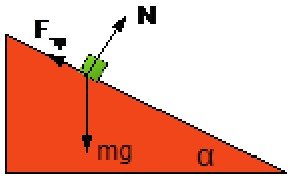
Если были попытки получить последнее выражение или оно получено с ошибкой, то вместо **2 баллов** ставится **0,5 балла**

5. Каждый работает по-своему (6 баллов)

Тело массы m из состояния покоя съезжает с вершины наклонной плоскости высотой h и, проехав всю наклонную плоскость, приобретает скорость. Угол наклона плоскости к горизонту α. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ.

- На рисунке укажите все силы, действующие на тело (1 балл);
- Найдите работу каждой силы в отдельности (1 балл за каждую работу силы)
- Каков конечный импульс тела? (2 балла)

Решение:



- На тело действуют: $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ - сила трения скольжения

(1 балл)

- Работа силы тяжести

$$A_{тяж} = mg \cdot \frac{h}{sin\alpha} \cdot cos(90^{\circ} - \alpha) = mgh$$

(1 балл)

- Работа силы реакции опоры

$$A_N = N \cdot \frac{h}{sin\alpha} \cdot cos90^{\circ} = 0$$

(1 балл)

- Работа силы трения скольжения

$$A_{тр} = \mu mgcos\alpha \cdot \frac{h}{sin\alpha} \cdot cos180^{\circ} = -\mu mghctg\alpha$$

(1 балл)

- Запишем второй закон Ньютона в проекциях на наклонную плоскость

$$mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha = ma$$

Откуда ускорение тела равно

$$a = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$$

(1 балл)

Тело двигается равноускоренно, поэтому из формулы $S = \frac{v^2}{2a}$ выразим конечную скорость

$$v = \sqrt{2aS}$$

S – путь, пройденный телом.

Конечный импульс тела

$$p = mv = m\sqrt{2aS} = m\sqrt{2g(sin\alpha - \mu cos\alpha)\frac{h}{sin\alpha}} = m\sqrt{2gh(1 - \mu ctg\alpha)}$$

(1 балл)

6. Нить и стержень (6 баллов)

Шарик массой m_1 висит на нити длиной l, а шарик массой m_2 – на невесомом жёстком стержне длиной nl. Оба шарика получают горизонтальные толчки и делают полный оборот в вертикальных плоскостях.

- Какова минимально возможная скорость шарика 1 в верхней точке траектории (2 балла);
- Какова минимально возможная скорость шарика 2 в верхней точке траектории (1 балл);
- Найдите отношение скоростей первого и второго шариков в нижней точке траектории в момент толчка, чтобы в верхних точках шарики обладали своими минимальными скоростями (3 балла).

Решение:

- При прохождении верхней точки на шарик действуют сила тяжести и сила реакции нити. Чем меньше скорость шарика, тем меньше сила реакции нити. При прохождении верхней точки с минимальной скоростью v_1 сила реакции будет равна нулю. Тогда по второму закону Ньютона

$$F = ma, \qquad m_1 g = \frac{m_1 v_1^2}{l},$$

(1 балл)

$$v_1 = \sqrt{gl}$$

(1 балл)

- При прохождении шариком на стержне верхней точки минимальная скорость шарика может быть равной нулю, так как в стержне в отличие от нити могут возникать силы упругости при сжатии

(1 балл)

- Воспользуемся законом сохранения механической энергии. В первом случае в нижней точке шарик обладает кинетической энергией, в верхней точке и кинетической, и потенциальной энергией (нулевой уровень потенциальной энергии соответствует нижней точке)

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = m_1 g \cdot 2l + \frac{m_1 v_1^2}{2} = 2m_1 gl + \frac{m_1 gl}{2} = \frac{5}{2} m_1 gl$$

Скорость первого шарика в нижней точке

$$u_1 = \sqrt{5gl}$$

(1 балл)

Во втором случае кинетическая энергия в нижней точке переходит в потенциальную энергию в верхней точке (кинетической энергии в верхней точке нет)

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} = m_2 g \cdot 2nl$$

Скорость второго шарика в нижней точке

$$u_2 = 2\sqrt{gnl}$$

(1 балл)

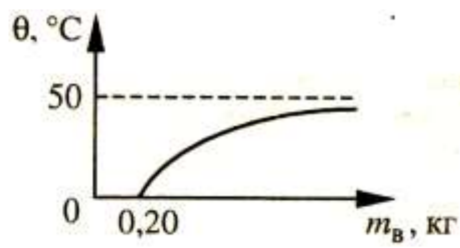
Отношение скоростей

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\sqrt{5gl}}{2\sqrt{gnl}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{n}}$$

(1 балл)

7. По капельке (7 баллов)

В калориметр, содержащий лёд при температуре $0^\circ C$, постепенно вливают воду при температуре T. На графике изображена зависимость температуры в калориметре от массы налитой воды. Плотность воды $\rho_в = 1{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{кг}{м^3}$, удельная теплоёмкость воды $4{,}2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C}$, удельная теплота плавления льда $3{,}3 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг}$.



Найдите:

- Температуру воды T, наливаемой в калориметр (1 балл); Ответ дать в виде целого числа (50).
- Первоначальную массу льда в калориметре (2 балла); Ответ округлить до сотых (0,13)
- Массу льда, оставшегося в калориметре, после вливания 0,050 кг воды и установления равновесия (2 балла); Ответ округлить до десятых (0,1)
- Установившуюся температуру в калориметре после вливания 1,0 л воды при температуре T (2 балла). Ответ округлить до целых (35)

Решение:

- По мере вливания воды температура смеси стремиться к температуре наливаемой воды, поэтому температура воды равна 50°C

(1 балл)

- Напишем уравнение теплового баланса, считая, что вся масса $m_л$ льда растает, когда будет добавлено 0,20 кг воды

$$m_л \cdot 3{,}3 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг} + 4{,}2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C} \cdot 0{,}20 кг \cdot (0^\circ C - 50^\circ C) = 0$$

$$m_л \approx 0{,}13кг$$

(2 балла)

- При вливании воды между водой и льдом начинается обмен теплотой. Посчитаем количество теплоты, необходимой для плавления всего куска льда

$$3{,}3 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг} \cdot 0{,}13кг \approx 4{,}3 \cdot 10^4 Дж$$

Посчитаем количество теплоты, которое отдаст вода при остывании до нуля

$$4{,}2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot {}^\circ C} \cdot 0{,}050кг \cdot 50^\circ C \approx 1{,}1 \cdot 10^4 Дж$$

Видно, что при остывании до нуля вода отдаст меньше энергии, чем необходимо для плавления всего льда. Вода, отдав эту теплоту, остыла до нуля, и лёд тоже находится при нуле. Следовательно, теплообмен на этом прекратится, так как температуры сравнялись. Лёд при этом процессе получил $1{,}1 \cdot 10^4$Дж от воды. Масса льда, превратившаяся в воду

$$\frac{1{,}1 \cdot 10^4 Дж}{3{,}3 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг}} \approx 0{,}033кг$$

Масса оставшегося льда $0{,}13кг - 0{,}033кг \approx 0{,}1кг$

(2 балла)

- При охлаждении одного литра воды до нуля выделится теплота

$$4{,}2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot {}^\circ C} \cdot 1{,}0кг \cdot 50^\circ C \approx 2{,}1 \cdot 10^5 Дж$$

Это значение превышает количество теплоты, необходимой для плавления всего льда, поэтому весь лёд растает и образовавшаяся изо льда вода нагреется до температуры T_1. До этой же температуры остынет вода, которую вливали. Составим уравнение теплового баланса

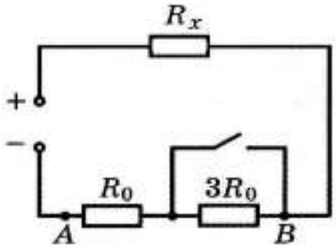
$$0{,}13кг \cdot 3{,}3 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг} + 4{,}2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot {}^\circ C} \cdot 0{,}13кг \cdot (T_1 - 0^\circ C) +$$

$$+4{,}2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot {}^\circ C} \cdot 1{,}0кг \cdot (T_1 - 50^\circ C) = 0$$

$$T_1 \approx 35^\circ C$$

(2 балла)

8. Странная мощность (8 баллов)



На участке АВ цепи мощность тока одинакова независимо от того, замкнут или разомкнут ключ. Сопротивление $R_0 = 40$ Ом . Напряжение на концах цепи постоянное.

- Напишите выражения для сопротивления всей цепи при разомкнутом и замкнутом положениях ключа (2 балла);
- Напишите выражения для силы тока в цепи при обоих положениях ключа (2 балла);
- Напишите выражения для мощности тока на участке АВ при обоих положениях ключа (2 балла);
- При каком значении R_x возможно равенство мощностей? (2 балла).

Решение:

Рассмотрим случай разомкнутого ключа. Сопротивление всей цепи будет равно

$$3R_0 + R_0 + R_x = 4R_0 + R_x.$$

(1 балл)

Пусть напряжение на концах участка U, тогда по закону Ома сила тока в цепи

$$I_1 = \frac{U}{4R_0 + R_x}$$

(1 балл)

Мощность тока на участке АВ

$$P_1 = I_1^2 \cdot 4R_0 = \left(\frac{U}{4R_0 + R_x}\right)^2 \cdot 4R_0$$

(1 балл)

Теперь замкнём ключ и повторим все рассуждения. Необходимо только учесть, что при замыкании ключа разность потенциалов на концах резистора $3R_0$ становится равной нулю и ток через этот резистор не идёт, весь ток пойдёт через ключ. Сопротивление цепи будет

$$R_0 + R_x$$

(1 балл)

Ток по закону Ома равен

$$I_2 = \frac{U}{R_0 + R_x}$$

(1 балл)

Мощность на участке АВ

$$P_1 = I_2^2 R_0 = \left(\frac{U}{R_0 + R_x}\right)^2 R_0$$

(1 балл)

По условию мощности равны

$$\left(\frac{U}{4R_0 + R_x}\right)^2 \cdot 4R_0 = \left(\frac{U}{R_0 + R_x}\right)^2 \cdot R_0$$

Решим полученное уравнение и найдём неизвестное сопротивление

$$R_x = 2R_0$$

$$R_x = 2 \cdot 40 \text{ Ом} = 80 \text{ Ом}$$

(2 балла)

Если значение сопротивления R_x получено неверное, то вместо **2 баллов** ставится **0,5 балла**