7 класс. Группа 2

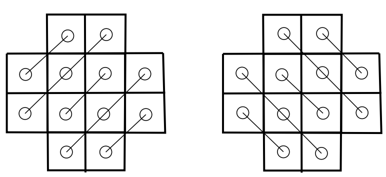
1. На плоскости выбраны 2024 точки так, что расстояния между любыми парами точек не равны. Соединим каждую точку с ближайшей к ней. Доказать, что каждая точка из данных 2024 оказалась соединена не более, чем с пятью другими.

   Решение. Предположим, рассуждая от противного, что некоторая точка O соединена по крайней мере с шестью точками A_1, A_2, $\dots$ A_6 (нумерация выбрана так, что углы $\angle A_1OA_i$ по возрастанию отложены от луча OA_1 против часовой стрелки). По определению, сторона A_iA_{i+1} самая большая в треугольнике $\triangle A_iOA_{i+1}$, поэтому $\angle A_iOA_{i+1} > 60°$, откуда сумма углов при вершине O будет больше $360°$.

2. Доказать, что среди пяти последовательных натуральных чисел всегда можно выбрать одно взаимно простое с каждым из остальных. (Напоминаем, что два числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.)

   Решение. Среди пяти последовательных натуральных чисел есть два или три четных числа. Эти числа не подходят в качестве искомых, так как все они делятся на 2. Значит, искомое число нечетное. Среди пяти последовательных чисел есть нечетное число a, не кратное трем. Покажем, что оно искомое. Пусть это число имеет общий простой делитель p с некоторым числом b из имеющихся пяти чисел. Тогда $p \geq 5$, так как это не может быть 2 или 3. Если $p = 5$, то a, b делятся на 5, что невозможно, так как среди пяти последовательных чисел ровно одно делится на 5. Если $p \geq 7$, значит, $|a - b| \geq 7$, что невозможно, так как a и b находятся среди пяти последовательных чисел.

3. Можно ли на клетчатой доске 2024×2024, из которой вырезали угловые клетки, расставить несколько фишек так, чтобы на каждой диагонали стояло нечетное количество фишек? (Все возможные диагонали для доски 4×4 показаны на рисунке ниже.)



   Ответ: нет.

   Решение. Предположим, что можно. Покрасим клетки доски в шахматную раскраску и проследим за черным цветом. Заметим, что «черных» диагоналей одного из направлений четное количество, а «белых» того же направления – нечетное, поскольку общее число диагоналей одного направления нечетное количество. Тогда с одной стороны на «черных» диагоналях нечетное число фишек, а с другой – четное. Противоречие.

8 класс. Группа 2

1. Длины последовательных сторон четырехугольника (в порядке обхода) равны a, b, c и d. Доказать, что его площадь S удовлетворяет неравенству

$$S \leqslant \frac{1}{4}(a + c)(b + d).$$

   *Решение.*Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Достаточно рассмотреть случай, когда $ABCD$ выпуклый. Действительно, пусть данный четырехугольник невыпуклый и вершина B (для определенности) лежит внутри $\triangle ACD$, тогда $S < S_{AB'CD}$, где B' симметрична B относительно прямой AC, $AB'CD$ – выпуклый четырехугольник и $AB' = AB = a$, $B'C = BC = b$. Заметим, что $S = S_{ABC} + S_{ACD} \leqslant \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd$, так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot BH \leqslant \frac{1}{2}ab$, где BH – высота ABC, и $S_{ACD} \leqslant \frac{1}{2}cd$. Тогда получаем $2S \leqslant ab+cd$. Аналогично $S = S_{ABD}+S_{BDC} \leq (ad+bc)$, откуда $2S \leqslant ad + bc$ и $4S \leqslant ab + cd + ad + bc = (a + c)(b + d)$.

2. Натуральные числа $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 3$ таковы, что множество $\{1, 2, 3, \ldots, kn\}$ можно разделить на n непересекающихся подмножеств по k чисел в каждом и таких, что в каждом из подмножеств наибольшее число равно сумме остальных. Докажите, что $k = 3$.

   Решение. Пусть S — сумма всех чисел множества, a_i $(i = \overline{1, n})$ — наибольшее из чисел i-го подмножества. Тогда

$$S = 1 + 2 + \cdots + kn = \frac{kn+1}{2} \cdot kn,$$

   а

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{S}{2} = \frac{kn+1}{4} \cdot kn.$$

   С другой стороны, сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ не превосходит суммы n наибольших чисел исходного множества, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant kn + (kn-1) + (kn-2) + \cdots + (kn-n+1) = \frac{kn+kn-n+1}{2} \cdot n.$$

   Решаем полученное неравенство

$$\frac{kn+1}{4} \cdot kn \leqslant \frac{kn+kn-n+1}{2} \cdot n;$$

$$(kn+1) \cdot k \leqslant 2(2kn-n+1);$$

$$k^2n - 4kn + k + 2n - 2 \leqslant 0;$$

$$n(k^2 - 4k + 2) + (k-2) \leqslant 0.$$

   При $k > 2$ второе слагаемое положительно, а при $k \geqslant 4$ положительно и первое слагаемое, поэтому неравенство верно только при $k = 3$. Доказательство завершено.

3. У Пети и Васи есть кусок кекса весом 1 килограмм. За один ход можно взять любое количество из уже имеющихся кусков кекса и разделить каждый из них на два меньших по весу куска, но так, чтобы каждый весил целое число грамм. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре обоих игроков?

   Ответ: побеждает Петя.

   *Решение.*Первым ходом разрежем кекс на куски 999г и 1г. После первого хода Пети осталось два куска нечётной массы. Заметим, что Вася не сможет сделать так, чтобы все оставшиеся после его хода куски были нечётной массы, так как любой кусок нечетной массы разбивается только на кусок чётной и нечётной массы. Так как Васе за ход нужно разбить хотя бы один кусок на две части, то после его хода обязательно образуется хотя бы один кусок чётной массы. Затем Петя своим ходом будет брать все куски чётной массы и разбивать каждый из них на два куска нечётной массы (например, x-1 и 1). Заметим, что мы не сможем бесконечно разбивать куски на части, т.к. кусок имеет конечную массу. Значит рано или поздно будет ситуация, когда все куски будут иметь массу 1 (1000 кусков массы 1). Заметим, что такая ситуация не может случится после хода Васи, т.к. после его хода обязательно появляется хотя бы один кусок чётной массы. Значит Вася выиграть не может. Значит побеждает Петя. После его хода получится ситуация, когда все куски будут равны 1, тогда Вася не сможет сходить и проиграет.

9 класс. Группа 2

1. Доказать, что в остроугольном неравнобедренном треугольнике ортоцентр лежит ближе к наименьшей из сторон.

   Решение. Пусть $\angle A$ — наименьший угол, H — ортоцентр, $[AA_1]$, $[BB_1]$ и $[CC_1]$ — высоты. Треугольник CA_1B_1 подобен исходному, поэтому в нем $\angle A_1 = \angle A$ и $\angle B_1 = \angle B$. Четырехугольник CA_1HB_1 вписан в некоторую окружность ω, причем из неравенства $90^\circ - \angle A_1 > 90^\circ - \angle B_1$ следует, что дуга B_1H в этой окружности больше дуги HA_1, откуда $|B_1H| > |A_1H|$. Аналогично доказывается, что $|C_1H| > |HA_1|$.

2. Для ненулевых чисел a, b, c известно, что $(4a-12b+5c)(9a+18b+5c) < 0$. Докажите, что $9b^2 > 5ac$.

   Решение. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2+6bx+5c$. Для нее известно, что $f(-2) \cdot f(3) < 0$, поэтому на промежутке $[-2; 3]$ эта функция меняет знак, откуда $D/4 = 9b^2 - 5ac > 0$.

3. Шахматная фигура «хамелеон» имеет два вида ходов: ходы вида $(2, 2)$ (т.е. на две клетки по диагонали) и ходы вида $(4, 1)$ (т.е. на 4 клетки по вертикали или горизонтали плюс на одну клетку в перпендикулярном направлении). В какое наименьшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 100×100 клеток, чтобы при любом ходе хамелеона менялся цвет клетки, на которой он стоит?

   Ответ: 3.

   Решение. Раскрасить в три цвета можно, просто циклически чередуя цвета горизонтальных одноклеточных полос.

   Чтобы доказать, что двух цветов недостаточно, рассмотрим семь клеток с координатами $(1, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 9)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$, $(9, 3)$, $(5, 2)$. Эти клетки образуют цикл длины 7 из пар клеток, соединенных ходом хамелеона. Его невозможно раскрасить в 2 цвета.

10 класс. Группа 2

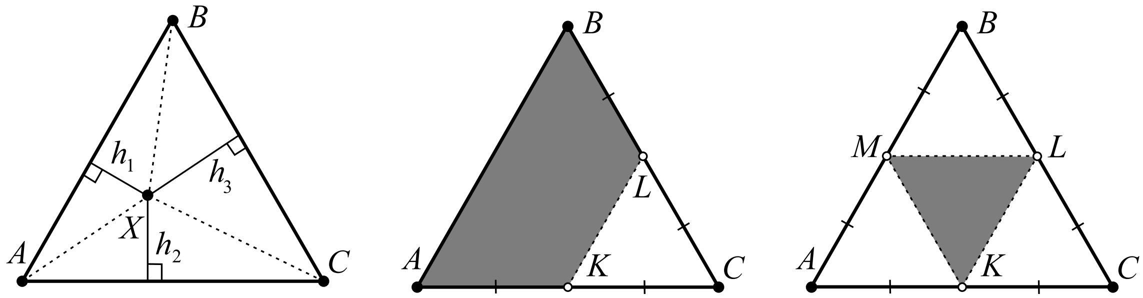
1. Дан равносторонний треугольник. Из произвольной точки X внутри него опущены перпендикуляры на его стороны. Найти геометрическое место всех таких точек X, что из отрезков этих перпендикуляров можно составить треугольник.

   *Решение.*Пусть a — длина стороны равностороннего треугольника ABC, h — длина его высоты и h_1, h_2, h_3 — расстояния от точки X (произвольной внутренней точки треугольника ABC) до сторон AB, AC и BC соответственно (левый рисунок). Для начала заметим, что

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3\right) = \frac{2}{a}\left(S_{ABX} + S_{ACX} + S_{BCX}\right) =$$

$$= \frac{2}{a} S_{ABC} = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = h.$$

Поэтому неравенство $h_1 < h_2 + h_3$ равносильно $2h_1 < h_1 + h_2 + h_3 = h$ или $h_1 < h/2$. Геометрическое место точек треугольника ABC, удовлетворяющих последнему неравенству, изображено на среднем рисунке. Осталось пересечь это ГМТ с двумя похожими множествами для неравенств $h_2 < h/2$, $h_3 < h/2$ и получить искомое ГМТ (внутреннюю часть треугольника, составленного из средних линий исходного), изображенное на правом рисунке.



2. Петя и Вася играют в игру. Сначала Петя выбирает t непустых подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4\}$ и сообщает их Васе. Затем они по очереди (начинает Вася) выбирают по одному, еще не выбранному числу из $\{1, 2, 3, 4\}$, пока все числа не будут выбраны. Вася выигрывает, если он собрал все элементы какого-то из выбранных Петей множеств. При каких t у Пети есть выигрышная стратегия?

   Ответ: при $t \in \{1, 2, ..., 7\}$.

   Решение. Если Петя выбрал какое-то одноэлементное множество, то Вася берет его элемент первым ходом и выигрывает. Если Петя выбрал хотя бы три двухэлементных множества, то какие-то два из них имеют общий элемент x. Вася может взять x первым ходом, а затем вторым ходом добрать двухэлементное множество при любом ответе Пети.

   Таким образом, Петя может выиграть, только если он взял 0 одноэлементных и не более 2-х двухэлементных. Всего не более $0 + 2 + 4 + 1 = 7$ множеств.

   Пусть $S = \{\{1, 4\}, \{2.3\}\}$. а T — множество всех подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4\}$, содержащих более 2-х элементов. Если $t \leqslant 7$, то Петя выбирает какое-то подмножество множества $S \cup T$.Далее на каждый ход Васи x Петя отвечает $5 - x$. Таким образом, Вася не сможет взять целиком ни пару $\{1, 4\}$, ни пару $\{2, 3\}$, т.е. ни одно из множеств из S. Никакое множество из T Вася не сможет собрать, поскольку они слишком большие.

3. Алиса выписала на доску все семизначные числа, кратные 11, каждое из которых содержит все цифры от 1 до 7 ровно по одному разу. Какое наибольшее количество чисел среди написанных на доске может выбрать Алиса так, чтобы ни у каких двух чисел не нашлось двух одинаковых цифр, стоящих в одном разряде?

   Ответ: 5.

   Решение. Пусть семизначное число имеет вид $\overline{abcdefg}$. Введём множества $X = \{a, c, e, g\}$ и $Y = \{b, d, f\}$. Обозначим $a + c + e + g = M$, $b + d + f = N$, тогда $M + N = 28$, $M - N \vdots 11$. Поскольку сумма и разность двух чисел имеют одинаковую чётность, то либо $M - N = \pm 22$, либо $M - N = 0$. В первом случае одно из чисел M, N равно 25, а другое равно 3. Число 3 нельзя получить из суммы хотя бы трёх различных натуральных чисел. Случай невозможен. Во втором случае $M = N = 14$. Заметим, что цифра 1 может участвовать во множестве Y только с цифрами $6, 7$, а цифра 7 может участвовать во множестве X только с цифрами 1,2,4. Для выполнения условий среди выбранных Алисой чисел каждая цифра должна стоять на любой из позиций не более одного раза, значит больше 7 чисел ей выбрать не удастся. Предположим, что она может выбрать 7 чисел, тогда цифра 1 присутствовала в Y вместе с 6 и 7 по три раза. Но тогда в любом из оставшихся четырёх семизначных чисел эти цифры должны быть вместе в X, а их сумма уже равна 14 - противоречие. Предположим, что она может выбрать 6 чисел, тогда цифра 1 присутствовала в Y вместе с 6 и 7 по два раза, иначе по соображениям из предыдущего случая нельзя будет выбрать ещё одно число. Тогда цифры 2,3,4,5 присутствовали в X тоже по два раза. Теперь цифра 7 может присутствовать в Y не более одного раза, а значит в X - не менее трёх раз, причём вместе с цифрами 1,2,4. Но в таком случае 2 и 4 попали в X уже хотя бы 5 раз - противоречие. Пример выбора 5 чисел: 1567324, 2136475, 4315762, 5724136, 7643251.

7 класс. Группа 1

1. На плоскости выбраны 2024 точки так, что расстояния между любыми парами точек не равны. Соединим каждую точку с ближайшей к ней. Доказать, что каждая точка из данных 2024 оказалась соединена не более, чем с пятью другими.

   Решение. Предположим, рассуждая от противного, что некоторая точка O соединена по крайней мере с шестью точками A_1, A_2, $\ldots$ A_6 (нумерация выбрана так, что углы $\angle A_1OA_i$ по возрастанию отложены от луча OA_1 против часовой стрелки). По определению, сторона A_iA_{i+1} самая большая в треугольнике $\triangle A_iOA_{i+1}$, поэтому $\angle A_iOA_{i+1} > 60°$, откуда сумма углов при вершине O будет больше $360°$.

2. Доказать, что среди пяти последовательных натуральных чисел всегда можно выбрать одно взаимно простое с каждым из остальных. (Напоминаем, что два числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.)

   Решение. Среди пяти последовательных натуральных чисел есть два или три четных числа. Эти числа не подходят в качестве искомых, так как все они делятся на 2. Значит, искомое число нечетное. Среди пяти последовательных чисел есть нечетное число a, не кратное трем. Покажем, что оно искомое. Пусть это число имеет общий простой делитель p с некоторым числом b из имеющихся пяти чисел. Тогда $p \geq 5$, так как это не может быть 2 или 3. Если $p = 5$, то a, b делятся на 5, что невозможно, так как среди пяти последовательных чисел ровно одно делится на 5. Если $p \geq 7$, значит, $|a - b| \geq 7$, что невозможно, так как a и b находятся среди пяти последовательных чисел.

3. У Пети и Васи есть кусок кекса весом 1 килограмм. За один ход можно взять любое количество из уже имеющихся кусков кекса и разделить каждый из них на два меньших по весу куска, но так, чтобы каждый весил целое число грамм. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре обоих игроков?

   Ответ: побеждает Петя.

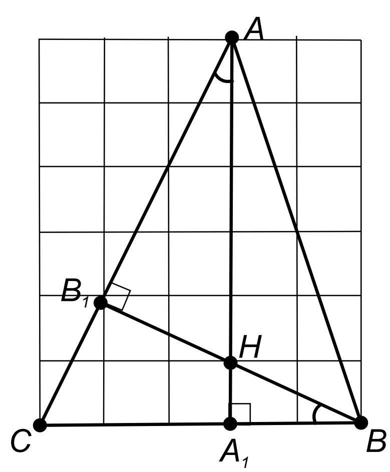
   *Решение.*Первым ходом разрежем кекс на куски 999г и 1г. После первого хода Пети осталось два куска нечётной массы. Заметим, что Вася не сможет сделать так, чтобы все оставшиеся после его хода куски были нечётной массы, так как любой кусок нечётной массы разбивается только на кусок чётной и нечётной массы. Так как Васе за ход нужно разбить хотя бы один кусок на две части, то после его хода обязательно образуется хотя бы один кусок чётной массы. Затем Петя своим ходом будет брать все куски чётной массы и разбивать каждый из них на два куска нечётной массы (например, x-1 и 1). Заметим, что мы не сможем бесконечно разбивать куски на части, т.к. кусок имеет конечную массу. Значит рано или поздно будет ситуация, когда все куски будут иметь массу 1 (1000 кусков массы 1). Заметим, что такая ситуация не может случится после хода Васи, т.к. после его хода обязательно появляется хотя бы один кусок чётной массы. Значит Вася выиграть не может. Значит побеждает Петя. После его хода получится ситуация, когда все куски будут равны 1, тогда Вася не сможет сходить и проиграет.

8 класс. Группа 1

1. На плоскости нарисована бесконечная клетчатая сетка, стороны клеток которой равны 1, а линии сетки параллельны координатным осям. Существует ли остроугольный треугольник с вершинами в узлах сетки, такой, что его высоты пересекаются в узле сетки?

   Ответ: да, существует.

   *Решение.*Рассмотрим узлы сетки A, A_1, B и C такие, что $AA_1 = 6$, $BA_1 = 2$, $CA_1 = 3$, причём A_1 лежит на отрезке BC. На отрезке AA_1 отметим точку H такую, что $A_1H = 1$. Докажем, что H - ортоцентр треугольника ABC. Пусть BH пересекает AC в точке B_1. Заметим, что в прямоугольных треугольниках AA_1C и BA_1H имеет место соотношение $\frac{BA_1}{AA_1} = \frac{A_1H}{CA_1}$, следовательно, эти треугольники подобны. Но тогда $\angle HBA_1 = \angle HAB_1$, из чего следует, что $\angle AB_1H = \angle HA_1B = 90°$, что и требовалось доказать.



2. Натуральные числа $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 3$ таковы, что множество $\{1, 2, 3, \ldots, kn\}$ можно разделить на n непересекающихся подмножеств по k чисел в каждом и таких, что в каждом из подмножеств наибольшее число равно сумме остальных. Докажите, что $k = 3$.

   Решение. Пусть S — сумма всех чисел множества, a_i ($i = \overline{1, n}$) — наибольшее из чисел i-го подмножества. Тогда

$$S = 1 + 2 + \cdots + kn = \frac{kn+1}{2} \cdot kn,$$

а

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{S}{2} = \frac{kn+1}{4} \cdot kn.$$

С другой стороны, сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ не превосходит суммы n наибольших чисел исходного множества, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant kn + (kn-1) + (kn-2) + \cdots + (kn-n+1) = \frac{kn+kn-n+1}{2} \cdot n.$$

Решаем полученное неравенство

$$\frac{kn+1}{4} \cdot kn \leqslant \frac{kn+kn-n+1}{2} \cdot n;$$

$$(kn+1) \cdot k \leqslant 2(2kn-n+1);$$

$$k^2 n - 4kn + k + 2n - 2 \leqslant 0;$$

$$n(k^2-4k+2) + (k-2) \leqslant 0.$$

При $k > 2$ второе слагаемое положительно, а при $k \geqslant 4$ положительно и первое слагаемое, поэтому неравенство верно только при $k = 3$. Доказательство завершено.

3. От квадрата со стороной n (n – натуральное число) отрезали прямоугольник $n \times p$ для некоторого простого p. Оказалось, что площадь оставшегося прямоугольника является квадратом некоторого натурального числа k. Найдите все пары (n, k), для которых это возможно.

   Ответ: $\left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^2, \frac{p^2-1}{4}\right)$ при нечетных p, при $p = 2$ не существует таких пар.

   Решение. По условию $n^2 - np = k^2$, т.е. $n(n-p) = k^2$. Рассмотрим два случая.

   1 *случай.* Существует $t \in \mathbb{N}$, что $n = pt$, т.е. $n \vdots p$, тогда $p^2t^2 - p^2t = k^2$, откуда $p^2t(t-1) = k^2$. Значит, $k \vdots p$, т.е. $k = ps$, $s \in \mathbb{N}$. После подстановки получим $t(t-1) = s^2$. Числа $t, t-1$ взаимно простые, значит, их произведение является квадратом целого числа тогда и только тогда, когда каждое из них является квадратом целого числа, т.е. $t = l^2$, $t-1 = m^2$, для $l, m \in \mathbb{N}$, $1 = l^2 - m^2 = (l-m)(l+m)$, откуда $l-m = l+m = 1$, т.е. $l = 1$, $m = 0$ и $n = p$, $k = 0$, противоречие.

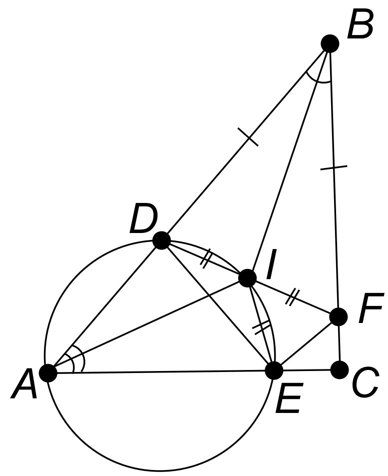
   2 *случай.* Пусть теперь n не делится на p, тогда НОД$(n, n-p)$=НОД$(p, n-p) = 1$. Значит, $n = l^2$, $n - p = m^2$ для $l, m \in \mathbb{N}$, $p = l^2 - m^2 = (l-m)(l+m)$, откуда $l - m = 1$, $l + m = p$, т.е. $l = \frac{p+1}{2}$, $m = \frac{p-1}{2}$, $n = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$, $k = lm = \frac{p^2-1}{4}$. Итак, при любом нечетном простом p существует единственная пара (n, k). При $p = 2$ уравнение $p = (l-m)(l+m)$ решений не имеет, так как $l-m$ и $l+m$ одной четности и p должно быть либо нечетным, либо делящимся на 4.

9 класс. Группа 1

1. В треугольнике ABC точка I - центр вписанной окружности. Окружность, проходящая через точки A и I, пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Прямая DI пересекает сторону BC в точке F. Оказалось, что $BD = BF$. Найдите угол DEF.

Ответ: 90°.

Решение. BI - биссектриса треугольника, значит треугольник DBF - равнобедренный и $DI = IF$. AI - биссектриса, значит $DI = IE$, как хорды, стягивающие равные дуги. В треугольнике DEF медиана равна половине стороны, поэтому он прямоугольный, то есть $\angle DEF = 90^\circ$.



2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 = b^3 = c^5$. Докажите, что число $a+b+c-1$ не является квадратом простого числа.

   Решение. Число, являющееся одновременной второй, третьей и пятой степенью натурального числа, является также тридцатой степенью натурального числа. Пусть $a^2 = b^3 = c^5 = n^{30}$, тогда $a = n^{15}$, $b = n^{10}$, $c = n^6$ и $a + b + c - 1 = n^{15} + n^{10} + n^6 - 1$. Заметим, что при $n = -1$ значение полученного выражения равно нулю, значит многочлен делится на $n + 1$. Предположим, что $n^{15} + n^{10} + n^6 - 1 = p^2$ при некотором простом p. Поскольку $p^2 \vdots (n + 1)$, то либо $p = n + 1$, либо $p^2 = n + 1$. В первом случае $n^{15} + n^{10} + n^6 - 1 = n^2 + 2n + 1$, но при $n = 1$ равенство не выполняется, а при $n \leqslant 2$ верно $n^6 - 1 > 1$, $n^{10} > 2n$, $n^{15} > n^2$. Во втором случае $n^{15} + n^{10} + n^6 - 1 = n + 1$, что является верным при $n = 1$, но тогда $2 = p^2$, чего быть не может. А если же $n \leqslant 2$, то $n^{15} + n^{10} + n^6 - 1 > n^2 + 2n + 1 > n + 2$. Следовательно, наше предположение неверное.

3. Найдите все натуральные числа $n > 1$ такие, что набор чисел $1, 2, 3, \ldots, 3n$ можно разделить на n наборов по 3 числа (различные наборы не имеют общих элементов, а объединение всех наборов совпадает с исходным множеством) с одинаковой суммой чисел в каждом.

   Ответ: все нечетные числа.

   Решение. Сумма чисел набора равна $1 + 2 + \cdots + 3n = \dfrac{3n(3n+1)}{2}$. Поэтому, для того, чтобы сумма чисел в каждой тройке была одинакова, необходимо, чтобы она равнялась $\dfrac{3(3n+1)}{2}$. Но при n чётном это число не целое (числитель не кратен 2). Значит, n обязано быть нечётным.

   Покажем, что при любом нечётном $n > 1$ набор чисел $1, 2, 3, \ldots, 3n$ можно разделить требуемым образом. Пусть $n = 2k + 1$, k — натуральное число. Требуется распределить все числа набора $1, 2, 3, \ldots, 6k+3$в $2k+1$ троек с одинаковой суммой, которая равна, как было показано выше, $\dfrac{3(3n+1)}{2} = 3(3k+2)$. Для этого распределим все числа набора по 6 группам следующим образом.

1-ая группа: все нечётные числа от 1 до $2k+1$ (включительно); числа упорядочим в порядке возрастания.

2-ая группа: все чётные числа от 2 до $2k$ (включительно); числа упорядочим в порядке возрастания.

3-я группа: все от $2k+2$ до $3k+2$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

4-я группа: все от $3k+3$ до $4k+2$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

5-я группа: все от $4k+3$ до $5k+2$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

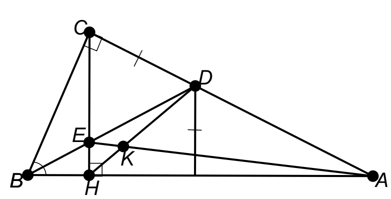
6-я группа: все от $5k+3$ до $6k+3$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

Легко заметить, что первой, третьей и шестой группах по $k+1$ элементу (назовём эти три группы *большими*), а во второй, четвёртой и пятой — по k (*маленькие* группы). Нужные нам тройки образуются так: элементы с одинаковым порядковым номером в каждой из больших групп образуют $k+1$ тройку, элементы с одинаковым порядковым номером в каждой из маленьких групп — ещё k троек. Сумма в каждой тройке будет равна $3(3k+2)$. Действительно, первая тройка в большой группе — это $(1,\ 3k+2,\ 6k+3)$, в маленькой — $(2,\ 4k+2,\ 5k+2)$ — суммы чисел в них те, какие требуется. При переходе к следующему номера два элемента тройки уменьшаются на 1, а один — увеличивается на 2. Следовательно, сумма чисел в тройке не меняется.

10 класс. Группа 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH к гипотенузе. Биссектриса BD угла B пересекает высоту в точке E. Пусть K — точка пересечения отрезков AE и HD. Докажите, что четырехугольник $CDKE$ и треугольник AHK равновелики.

   Решение. Очевидно, $S_{CDKE} = S_{AHK} \Leftrightarrow S_{CEA} = S_{HDA}$, $S_{CEA} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CE$, $S_{HDA} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot h_D = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD$ (поскольку $h_D = CD$, так как D лежит на биссектрисе угла треугольника). Требуемое равенство равносильно равенству $CE = CD$. Докажем, что оно выполняется. Пусть $\angle CBD = \angle DBA = \beta$, $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle DEC = \angle BEH = 90^\circ - \beta$, $\angle CDE = \beta + \alpha = 90^\circ - \beta$ $(2\beta + \alpha = \angle CBA + \angle CAB = 90^\circ)$, значит, треугольник CED – равнобедренный, откуда следует необходимое равенство.



2. Алиса выписала на доску все семизначные числа, кратные 11, каждое из которых содержит все цифры от 1 до 7 ровно по одному разу. Какое наибольшее количество

чисел среди написанных на доске может выбрать Алиса так, чтобы ни у каких двух чисел не нашлось двух одинаковых цифр, стоящих в одном разряде?

Ответ: 5.

Решение. Пусть семизначное число имеет вид $\overline{abcdefg}$. Введём множества $X = \{a, c, e, g\}$ и $Y = \{b, d, f\}$. Обозначим $a + c + e + g = M$, $b + d + f = N$, тогда $M + N = 28$, $M - N \vdots 11$. Поскольку сумма и разность двух чисел имеют одинаковую чётность, то либо $M - N = \pm 22$, либо $M - N = 0$. В первом случае одно из чисел M, N равно 25, а другое равно 3. Число 3 нельзя получить из суммы хотя бы трёх различных натуральных чисел. Случай невозможен. Во втором случае $M = N = 14$. Заметим, что цифра 1 может участвовать во множестве Y только с цифрами $6, 7$, а цифра 7 может участвовать во множестве X только с цифрами 1,2,4. Для выполнения условий среди выбранных Алисой чисел каждая цифра должна стоять на любой из позиций не более одного раза, значит больше 7 чисел ей выбрать не удастся. Предположим, что она может выбрать 7 чисел, тогда цифра 1 присутствовала в Y вместе с 6 и 7 по три раза. Но тогда в любом из оставшихся четырёх семизначных чисел эти цифры должны быть вместе в X, а их сумма уже равна 14 - противоречие. Предположим, что она может выбрать 6 чисел, тогда цифра 1 присутствовала в Y вместе с 6 и 7 по два раза, иначе по соображениям из предыдущего случая нельзя будет выбрать ещё одно число. Тогда цифры 2,3,4,5 присутствовали в X тоже по два раза. Теперь цифра 7 может присутствовать в Y не более одного раза, а значит в X - не менее трёх раз, причём вместе с цифрами 1,2,4. Но в таком случае 2 и 4 попали в X уже хотя бы 5 раз - противоречие. Пример выбора 5 чисел: 1567324, 2136475, 4315762, 5724136, 7643251.

3. Найдите все натуральные числа $n > 1$ такие, что набор чисел $1, 2, 3, \ldots, 3n$ можно разделить на n наборов по 3 числа (различные наборы не имеют общих элементов, а объединение всех наборов совпадает с исходным множеством) с одинаковой суммой чисел в каждом.

Ответ: все нечетные числа.

Решение. Сумма чисел набора равна $1 + 2 + \cdots + 3n = \dfrac{3n(3n+1)}{2}$. Поэтому, для того, чтобы сумма чисел в каждой тройке была одинакова, необходимо, чтобы она равнялась $\dfrac{3(3n+1)}{2}$. Но при n чётном это число не целое (числитель не кратен 2). Значит, n обязано быть нечётным.

Покажем, что при любом нечётном $n > 1$ набор чисел $1, 2, 3, \ldots, 3n$ можно разделить требуемым образом. Пусть $n = 2k + 1$, k — натуральное число. Требуется распределить все числа набора $1, 2, 3, \ldots, 6k+3$в $2k+1$ троек с одинаковой суммой, которая равна, как было показано выше, $\dfrac{3(3n+1)}{2} = 3(3k+2)$. Для этого распределим все числа набора по 6 группам следующим образом.

1-ая группа: все нечётные числа от 1 до $2k+1$ (включительно); числа упорядочим в порядке возрастания.

2-ая группа: все чётные числа от 2 до $2k$ (включительно); числа упорядочим в порядке возрастания.

3-я группа: все от $2k+2$ до $3k+2$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

4-я группа: все от $3k+3$ до $4k+2$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

5-я группа: все от $4k+3$ до $5k+2$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

6-я группа: все от $5k+3$ до $6k+3$ (включительно); числа упорядочим в порядке убывания.

Легко заметить, что первой, третьей и шестой группах по $k+1$ элементу (назовём эти три группы *большими*), а во второй, четвёртой и пятой — по k (*маленькие* группы). Нужные нам тройки образуются так: элементы с одинаковым порядковым номером в каждой из больших групп образуют $k+1$ тройку, элементы с одинаковым порядковым номером в каждой из маленьких групп — ещё k троек. Сумма в каждой тройке будет равна $3(3k+2)$. Действительно, первая тройка в большой группе — это $(1,\ 3k+2,\ 6k+3)$, в маленькой — $(2,\ 4k+2,\ 5k+2)$ — суммы чисел в них те, какие требуется. При переходе к следующему номера два элемента тройки уменьшаются на 1, а один — увеличивается на 2. Следовательно, сумма чисел в тройке не меняется.