Младшая лига. Группа 2

1. Для ненулевых чисел a, b, c известно, что $(4a - 4b + c)(4a + 4b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 > ac$.

   Решение 1.

   Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + 2bx + c$. Для нее известно, что $f(-2) \cdot f(2) < 0$, поэтому на промежутке $[-2; 2]$ эта функция меняет знак, откуда $D/4 = b^2 - ac > 0$.

   Решение 2.

   Раскрыв скобки, получим $(4a + c)^2 - 16b^2 < 0$. Добавив к обеим частям $16b^2 - 16ac$, получим $0 \leqslant (4a - c)^2 < 16(b^2 - ac)$.

2. Шахматная фигура «хамелеон» имеет два вида ходов: ходы вида $(2, 2)$ (т.е. на две клетки по диагонали) и ходы вида $(4, 1)$ (т.е. на 4 клетки по вертикали или горизонтали плюс на одну клетку в перпендикулярном направлении). В какое наименьшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 100×100 клеток, чтобы при любом ходе хамелеона менялся цвет клетки, на которой он стоит?

   Ответ: 3.

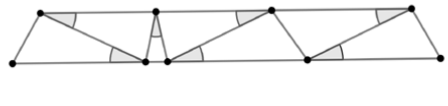
   Решение. Раскрасить в три цвета можно, просто циклически чередуя цвета горизонтальных одноклеточных полос.

   Чтобы доказать, что двух цветов недостаточно, рассмотрим семь клеток с координатами $(1, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 9)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$, $(9, 3)$, $(5, 2)$. Эти клетки образуют цикл длины 7 из пар клеток, соединенных ходом хамелеона. Его невозможно раскрасить в 2 цвета.

3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может разрезать любой равносторонний треугольник на треугольники так, что у каждого получившегося треугольника будет угол в 26°. Может ли он в этом случае не врать?

   Ответ: да, может.

   Решение. Опишем идею разбиения. Разобьем наш равносторонний треугольник на три равные равнобедренные трапеции с углами 120° и 60° градусов. Затем каждую из этих трапеций разрежем прямыми, параллельными основаниям, на несколько равнобедренных трапеций с углами 120° и 60°, у каждой из которых отношение высоты к каждому из оснований столь малое, чтобы каждую из ним можно было разрезать так, как показано на рисунке (на рисунке отмечены углы, равные 26°).



4. На доске нарисован правильный 2024-угольник. Петя провел в нем несколько диагоналей так, что он распался на треугольники, причем пересечения диагоналей допускаются только в вершинах данного многоугольника. Каких треугольников могло получиться больше и на сколько: тех, у кого стороны не совпадают со сторонами 2024-угольника, или тех, у кого две стороны совпадают со сторонами 2024-угольника?

   Ответ: второго вида треугольников на 2 больше.

   Решение. Есть три вида треугольников: те, у кого стороны не совпадают со сторонами многоугольника (их количество обозначим за x), те, у кого ровно одна сторона совпадает со стороной многоугольника (их пусть будет y), и те, у кого две стороны совпадают со сторонами многоугольника (таких пусть всего z), тогда всего треугольников $x + y + z = 2022$, а общее число сторон многоугольника $2024 = y + 2z$, тогда $2 = z - x$, т.е. треугольников, где две стороны совпадают со сторонами многоугольника, на 2 больше, чем треугольников, где стороны не совпадают со сторонами треугольника.

5. Петя и Вася играют в игру. Сначала Петя выбирает t непустых подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4\}$ и сообщает их Васе. Затем они по очереди (начинает Вася) выбирают по одному, еще не выбранному числу из $\{1, 2, 3, 4\}$, пока все числа не будут выбраны. Вася выигрывает, если он собрал все элементы какого-то из выбранных Петей множеств. При каких t у Пети есть выигрышная стратегия?

   Ответ: при $t \in \{1, 2, ..., 7\}$.

   Решение. Если Петя выбрал какое-то одноэлементное множество, то Вася берет его элемент первым ходом и выигрывает. Если Петя выбрал хотя бы три двухэлементных множества, то какие-то два из них имеют общий элемент x. Вася может взять x первым ходом, а затем вторым ходом добрать двухэлементное множество при любом ответе Пети.

   Таким образом, Петя может выиграть, только если он взял 0 одноэлементных и не более 2-х двухэлементгых. Всего не более $0 + 2 + 4 + 1 = 7$ множеств.

   Пусть $S = \{\{1, 4\}, \{2.3\}\}$. а T — множество всех подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4\}$, содержащих более 2-х элементов. Если $t \leqslant 7$, то Петя выбирает какое-то подмножество множества $S \cup T$.Далее на каждый ход Васи x Петя отвечает $5 - x$. Таким образом, Вася не сможет взять целиком ни пару $\{1, 4\}$, ни пару $\{2, 3\}$, т.е. ни одно из множеств из S. Никакое множество из T Вася не сможет собрать, поскольку они слишком большие.

6. В городе 300000 жителей с телефонами. Оказалось, что как ни составляй список владельцев телефонов, найдется такое число $k \in \{1, 2, ..., 100000\}$, что жители с номерами $3k - 2, 3k - 1, 3k$ в этом списке, когда-то созванивались (каждый с каждым). Обязательно ли можно так составить список владельцев телефонов, что для любого числа $k \in \{1, 2, ..., 100000\}$ жители с номерами $3k - 2, 3k - 1$ в этом списке, когда-то созванивались.

   Ответ: да, обязательно.

   Решение. Пусть G — граф, вершины которого — жители с телефонами, а ребра — пары созванивавшихся. В дополняющем графе $\overline{G}$ вершины те же, а ребра — пары несозванивавшихся.

   В $\overline{G}$ не может быть паросочетания из 100000 ребер. Действительно, если такое паросочетание есть, то составим список так, чтобы ребра этого паросочетания, соединяли вершины с номерами 1 и 2, 4 и 5, 7 и 8, ..., 299998 и 299999, получим, что нет такого числа $k \in \{1, 2, ..., 100000\}$, что жители с номерами $3k - 2, 3k - 1, 3k$ в этом списке, когда-то созванивались (каждый с каждым). Это противоречит условию.

   Рассмотрим паросочетание M в $\overline{G}$ с наибольшим числом ребер. $|M| \leqslant 99999$. Пусть T — множество вершин задействованных в M, а S — множество остальных вершин.Тогда $|T| = 2 \cdot |M| \leqslant 199998$, а $|S| \geqslant 100002 > |M| + 2 \geqslant 2$.

   Пусть $a, b \in S$ и $\{c, d\} \in M$. Заметим, что по выбору M любые две вершины из S не могут быть соединены ребром в $\overline{G}$, а значит они соединены ребром в G, т.е. $\{a, b\}$ —

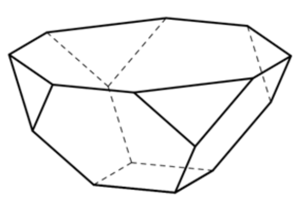
ребро в G. Заметим также, что если обе пары $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ — ребра в $\overline{G}$, то, заменив в паросочетании M ребро $\{c, d\}$ на пару ребер $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ получим паросочетание большего размера, что противоречит выбору M. Значит, хотя бы одна из этих пар — ребро в G. Пусть это $\{a, c\}$. Поставим в список жителей a, c, d с номерами $1, 2, 3$, соответственно. (1 и 2 созванивались)

Пусть теперь новые графы G и $\overline{G}$ получены из старых удалением вершин a, c, d. Тогда новое M это $M \setminus \{\{c, d\}\}$, при этом по-прежнему M паросочетание в $\overline{G}$ с наибольшим числом ребер (Иначе вернув ребро $\{c, d\}$ получили бы паросочетание больше, чем M). Новое T — это $T \setminus \{c, d\}$, новое S — это $S \setminus \{a\}$ (При этом по-прежнему $|S| > |M| + 2 \geqslant 2$). Рассматривая как и выше новые $a, b \in S$ и $\{c, d\} \in M$, ставим a, c, d в список под номерами $4, 5, 6$. (4 и 5 созванивались)

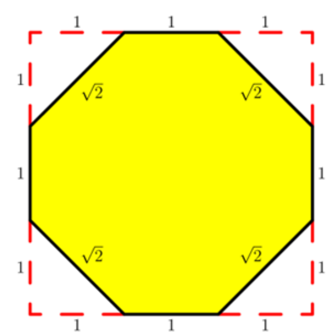
Действуя так и далее, получим такой список длины $3 \cdot |M|$, в котором для любого числа $k \in \{1, 2, ..., |M|\}$ жители с номерами $3k - 2, 3k - 1$ в этом списке, когда-то созванивались. Кроме того, остается, еще $300000 - 3 \cdot |M|$ жителей из оставшегося множества S, а они созванивались каждый с каждым. Добавим их в конец списка в произвольном порядке и получим требуемый список.

Старшая лига. Группа 2

1. Чаша формируется путем присоединения четырех правильных шестиугольников со стороной 1 к квадрату со стороной 1 . Ребра соседних шестиугольников совпадают. Какова площадь восьмиугольника, полученного при соединении восьми верхних вершин четырех шестиугольников, расположенных на краю чаши?



а)



б)

Рис. 1: Задача 1

Ответ: 7.

*Решение.*Периметр квадратного дна чаши равен 4. На «полпути вверх» по чаше граница по-прежнему представляет собой квадрат с периметром 8. Удлинение нижней половины чаши в два раза по ее высоте (полная высота чаши) снова увеличит периметр на ту же величину, образуя квадрат с периметром 12. Таким образом, верхний восьмиугольник вырезается из квадрата с длиной стороны $12/4 = 3$ и, следовательно, площадью 9. Разница между построенным выше квадратом и восьмиугольником составляет четыре прямоугольных треугольника, и (в силу симметрии) каждый из них является равнобедренным с перпендикулярными основаниями одинаковой длины и длиной$(3 - 1) / 2 = 1$, и, следовательно, имеет площадь $1/2$. Следовательно, площадь восьмиугольника равна $9 - (4 \cdot 1/2) = 7$.

2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ с действительными коэффициентами *оскорбительный*, если уравнению $f(f(x)) = 0$ удовлетворяют ровно три действительных числа. Среди всех оскорбительных квадратных трехчленов есть единственный такой $F(x)$, у которого сумма корней максимальна. Чему равно $F(1)$?

   Ответ: $\frac{5}{16}$.

   Решение. Пусть r_1 и r_2 будут корнями $F(x)$. Тогда $F(x) = (x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$. Решения $F(F(x)) = 0$ это объединения решений $F(x) - r_1 = x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_1) = 0$ и $F(x) - r_2 = x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_2) = 0$. Заметим, что один из этих двух квадратичных уравнений имеет одно решение (кратный корень), а другой – два, поскольку существует ровно три решения. Б.о.о. квадратное уравнение с одним корнем $x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_1) = 0$. Тогда его дискриминант равен 0, поэтому $(r_1 + r_2)^2 = 4r_1 r_2 - 4r_1$, откуда $r_1 - r_2 = \pm 2\sqrt{-r_1}$.

   Чтобы уравнение $x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_2) = 0$ имело два решения, необходимо чтобы дискриминант $(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 + 4r_2$ был положительным. Отсюда мы получаем что $(r_1 - r_2)^2 > -4r_2$, значит $-4r_1 > -4r_2$, откуда $r_1 < r_2$, значит $r_1 - r_2$ – отрицательно, поэтому $r_1 - r_2 = -2\sqrt{-r_1}$. Сумма корней $F(x)$ есть $2r_1 + 2\sqrt{-r_1}$, максимальное значение которого при $r_1 = -\frac{1}{4}$. Тогда $r_2 = \frac{3}{4}$, и, $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$, откуда $F(1) = \frac{5}{16}$.

3. Аня и Ваня раскладывают натуральное число N всевозможными способами в сумму нескольких натуральных слагаемых (разложения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными). При этом Аня подбирает только такие разложения, где все слагаемые нечетны, а Ваня — такие разложения, в которых первое слагаемое строго больше второго, третье — строго больше четвертого, пятое строго больше шестого и т.д. (в случае, когда число слагаемых оказалось нечетным, на последнее слагаемое ограничений нет). У кого количество разложений будет больше?

   Ответ: поровну.

   Решение. Построим биекцию между множествами разбиений. Пусть у нас есть разбиение N, в котором каждое слагаемое с нечётным номером больше следующего. Разобьём эти слагаемые на пары соседних (последнее слагаемое может остаться без пары; в таком случае допишем ему в пару нулевое слагаемое). Паре слагаемых (a, b) $(a > b)$ мы сопоставим нечётные слагаемые $1, 1, \ldots, 1, 2b + 1$ (количество единиц равно $b - a - 1$). Обратно, пусть есть разбиение на нечётные слагаемые. Разделим их на блоки: каждый блок состоит из нескольких (возможно, нуля) единиц и заканчивается неединичным слагаемым $2b + 1$. Заменим этот блок на пару слагаемых a и b с сохранением суммы. Очевидно, что эти соответствия взаимно обратны.

4. В неравнобедренном треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точка D — основание биссектрисы из угла A. Точки E и F симметричны D относительно CI и BI соответственно. Описанные окружности треугольников BFI и DEI пересекаются в точке P, а треугольников CEI и DFI — в точке Q. Докажите, что $PQ \perp BC$.

   Ответ:

   Решение. Обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Докажем равенство треугольников IPE и IPF. У них есть равные стороны $IE = IF$ и общая сторона IP. Также у них есть равные углы $\angle IPE = \angle IDE = 180° - \angle IDB - \angle EDC = 180° - (\alpha + 2\gamma) - (90° - \gamma) = \beta$ и $\angle IPF = \angle IBF = \beta$. Значит, эти треугольники либо равны, либо

$IEP+\angle IFP=180^\circ$. Последнее невозможно, поскольку тогда $\angle IDP+\angle IBP=180^\circ$, но сумма этих углов меньше суммы углов треугольника IBD. Аналогично доказывается равенство треугольников IQE и IQF. Отсюда следует, что IPQ — одна прямая, перпендикулярная EF. Осталось доказать, что $EF||BC$. Это верно по теореме Фалеса и свойству биссектрисы: $AB/AC=DB/DC=FB/EC$, откуда $EF||BC$.

5. Найдите все такие целые n, что $\frac{n}{n-2024}$ является квадратом целого числа.

   Ответ: $n\in\{0,2025,2277\}$.

   Решение. Пусть $\frac{n}{n-2024}=k^2$, для целого неотрицательного k. Если $k=0$, то $n=0$, иначе k — натуральное. Тогда $\frac{2024}{n-2024}=k^2-1=(k-1)(k+1)$, т.е. $(k-1)$ и $(k+1)$ — натуральные делители числа 2024, отличающиеся на 2. $2024=2^3\cdot 11\cdot 23$ имеет 16 натуральных делителей: $1,2,4,8,11,22,23,44,46,88,92,184,253,506,1012,2024$, среди которых ровно две пары отличающихся на 2, что дает $k=3$ или $k=45$. Отсюда $n-2024$ равно либо 253, либо 1, т.е. n это либо 2277, либо 2025.

6. Целой частью числа t называется наибольшее целое число, не превосходящее t, обозначается она через $[t]$ (например, $[-1,2]=-2$, $[1,8]=1$). Вещественное число $x\leqslant 1$ таково, что все числа $[x^2]$, $[x^3]$ и $[x^4]$ — точные квадраты (т.е являются квадратами некоторых целых чисел). Обязательно ли $[x]$ — точный квадрат?

   Ответ: да, обязательно.

   *Решение.*Допустим, что $x<0$, тогда $[x^3]\leqslant x^3<0$, и, значит, $[x^3]$ не может быть точным квадратом. Следовательно, $0\leqslant x\leqslant 1$. Отсюда $[x]\in\{0,1\}$ — точный квадрат.

Младшая лига. Группа 1

1. Петя и Вася играют в игру. Сначала Петя выбирает t непустых подмножеств множества $\{1,2,3,4,5\}$ и сообщает их Васе. Затем они по очереди (начинает Вася) выбирают по одному, еще не выбранному числу из $\{1,2,3,4,5\}$, пока все числа не будут выбраны. Вася выигрывает, если он собрал все элементы какого-то из выбранных Петей множеств. При каких t у Пети есть выигрышная стратегия?

   Ответ: при $t\in\{1,2,...,14\}$.

   Решение. Если Петя выбрал какое-то одноэлементное множество, то Вася берет его элемент первым ходом и выигрывает. Если Петя выбрал хотя бы три двухэлементных множества, то какие-то два из них имеют общий элемент x. Вася может взять x первым ходом, а затем вторым ходом добрать двухэлементное множество при любом ответе Пети.

   Если Петя выбрал хотя бы 7 трехэлементных множеств, то среди них найдутся 5 имеющие общий элемент x. Действительно, если каждый элемент входит не более, чем в 4 множества из этих 7, то общее число вхождений элементов в множества не превосходит $4\cdot 5=20$, но оно равно $3\cdot 7=21$, противоречие. Всего имеется 6 трехэлементных подмножеств множества $\{1,2,3,4,5\}$, содержащих x, а Петя выбрал 5 из них, т.е. не выбрал не более одного. Пусть Петя не выбрал только $\{x,y,z\}$

   Вася первым ходом берет x, затем на любой ход Пети он берет элемент из $\{1,2,3,4,5\}\setminus\{x,y,z\}$, а, значит, в итоге Вася набирает трехэлементное множество, содержащее x и отличное от $\{x,y,z\}$, т.е. выбранное Петей.

   Таким образом, Петя может выиграть, только если он взял 0 одноэлементных, не более 2-х двухэлементных и не более 6-и трехэлементных. Всего не более $0+2+6+5+1=14$ множеств.

Пусть $S = \{\{1,5\},\{1,2,5\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2.4\},\{1.2,4\},\{2.3,4\},\{2.4,5\}\}$. а T — множество всех подмножеств множества $\{1,2,3,4,5\}$, содержащих более 3-х элементов. Если $t \leqslant 14$, то Петя выбирает какое-то подмножество множества $S \cup T$.Далее на каждый ход Васи $x \neq 3$ Петя отвечает $6 - x$, если он еще такого хода не делал. Иначе он ходит как угодно. Таким образом, Вася не сможет взять целиком ни пару $\{1,5\}$, ни пару $\{2,4\}$, а, значит, и ни одно из множеств из S. Никакое множество из T Вася не сможет собрать, поскольку они слишком большие.

2. Шахматная фигура «хамелеон» имеет два вида ходов: ходы вида $(2,2)$ (т.е. на две клетки по диагонали) и ходы вида $(4,1)$ (т.е. на 4 клетки по вертикали или горизонтали плюс на одну клетку в перпендикулярном направлении). В какое наименьшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 100×100 клеток, чтобы при любом ходе хамелеона менялся цвет клетки, на которой он стоит?

   Ответ: 3.

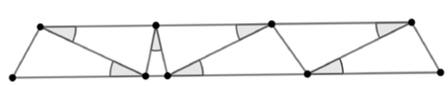
   Решение. Раскрасить в три цвета можно, просто циклически чередуя цвета горизонтальных одноклеточных полос.

   Чтобы доказать, что двух цветов недостаточно, рассмотрим семь клеток с координатами $(1,1)$, $(2,5)$, $(3,9)$, $(5,7)$, $(7,5)$, $(9,3)$, $(5,2)$. Эти клетки образуют цикл длины 7 из пар клеток, соединенных ходом хамелеона. Его невозможно раскрасить в 2 цвета.

3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может разрезать любой равносторонний треугольник на треугольники так, что у каждого получившегося треугольника будет угол в $26°$. Может ли он в этом случае не врать?

   Ответ: да, может.

   Решение. Опишем идею разбиения. Разобьем наш равносторонний треугольник на три равные равнобедренные трапеции с углами $120°$ и $60°$ градусов. Затем каждую из этих трапеций разрежем прямыми, параллельными основаниям, на несколько равнобедренных трапеций с углами $120°$ и $60°$, у каждой из которых отношение высоты к каждому из оснований столь малое, чтобы каждую из ним можно было разрезать так, как показано на рисунке (на рисунке отмечены углы, равные $26°$).



4. Докажите, что при $a, b, c \geq 3$ выполняется неравенство $3(abc + b + 2c) \geq 2(ab + 2ac + 3bc)$.

   Решение. Выполним замену: $a = x+3$, $b = y+3$, $c = z+3$, тогда исходное неравенство после подстановки и раскрытия скобок примет вид:

   $$3xyz + 9xy + 9yz + 9xz + 27x + 30y + 33z + 108 \geq 2xy + 6yz + 4xz + 18x + 24y + 30z + 108,$$

   что, очевидно, верно, поскольку $x, y, z \geq 0$.

5. Найдите все такие тройки натуральных чисел (x, y, z), что $7^x + 13^y = 8^z$.

   Ответ: $(3,2,3)$ — единственная тройка.

   Решение.

Записывая сравнения по модулям 4 и 3, находим $(-1)^x + 1^y \equiv 0(\mod 4)$, откуда x нечетно и $1^x + 1^y \equiv (-1)^z(\mod 3)$, откуда z нечетно. Полагая $x = 2m+1$, $z = 2n+1$, по модулю 13 получаем $7 \cdot (-3)^m \equiv 8 \cdot (-1)^n(\mod 13)$. Левая часть может быть сравнима только с 5, -2 или 6 по модулю 13, причем с 5 – только при $m = 3k+1$, а правая может быть сравнима с 5 или -5 по модулю 13. Таким образом, $x = 2m+1 = 6k+3 = 3l$, где l – нечетное. Таким образом 13^y можно разложить на множители как разность кубов:

$$13^y = 8^z - 7^x = (2^z - 7^l)(2^{2z} + 2^z 7^l + 7^{2l}).$$

Числа $a = 2^z$ и $b = 7^l$ взаимно просты, поэтому два сомножителя в последней формуле могут иметь общим простым делителем только 3: если $a - b$ делится на p и $a^2 + ab + b^2$ делится на p, то на p также делится $a^2 + ab + b^2 - (a-b)^2 = 3ab$, а a и b взаимно простые. Поскольку произведение этих множителей – степень числа 13, т.е. каждый из множителей является некоторой степенью 13, тогда $2^z - 7^l = 1$, т.е. $2^z = 7^l + 1$. Заметим, что $7^l + 1$ не делится на 16 при любом $l \in \mathbb{N}$. Значит, $z \leqslant 3$. Решение найдется только при $z = 3$: $l = 1$, $x = 3$, $y = 2$.

6. В городе 300000 жителей с телефонами. Оказалось, что как ни составляй список владельцев телефонов, найдется такое число $k \in \{1, 2, ..., 100000\}$, что жители с номерами $3k-2, 3k-1, 3k$ в этом списке, когда-то созванивались (каждый с каждым). Обязательно ли можно так составить список владельцев телефонов, что для любого числа $k \in \{1, 2, ..., 100000\}$ жители с номерами $3k-2, 3k-1$ в этом списке, когда-то созванивались.

   Ответ: да, обязательно.

   Решение.

   Пусть G — граф, вершины которого — жители с телефонами, а ребра — пары созванивавшихся. В дополняющем графе $\overline{G}$ вершины те же, а ребра — пары несозванивавшихся.

   В $\overline{G}$ не может быть паросочетания из 100000 ребер. Действительно, если такое паросочетание есть, то составим список так, чтобы ребра этого паросочетания, соединяли вершины с номерами 1 и 2, 4 и 5, 7 и 8, ..., 299998 и 299999, получим, что нет такого числа $k \in \{1, 2, ..., 100000\}$, что жители с номерами $3k-2, 3k-1, 3k$ в этом списке, когда-то созванивались (каждый с каждым). Это противоречит условию.

   Рассмотрим паросочетание M в $\overline{G}$ с наибольшим числом ребер. $|M| \leqslant 99999$. Пусть T — множество вершин задействованных в M, а S — множество остальных вершин.Тогда $|T| = 2 \cdot |M| \leqslant 199998$, а $|S| \geqslant 100002 > |M| + 2 \geqslant 2$.

   Пусть $a, b \in S$ и $\{c, d\} \in M$. Заметим, что по выбору M любые две вершины из S не могут быть соединены ребром в $\overline{G}$, а значит они соединены ребром в G, т.е. $\{a, b\}$ — оебро в G. Заметим также, что если обе пары $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ — ребра в $\overline{G}$, то, заменив в паросочетании M ребро $\{c, d\}$ на пару ребер $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ получим паросочетание большего размера, что противоречит выбору M. Значит, хотя бы одна из этих пар — ребро в G. Пусть это $\{a, c\}$. Поставим в список жителей a, c, d с номерами $1, 2, 3$, соответственно. (1 и 2 созванивались)

   Пусть теперь новые графы G и $\overline{G}$ получены из старых удалением вершин a, c, d. Тогда новое M это $M \setminus \{\{c, d\}\}$, при этом по-прежнему M паросочетание в $\overline{G}$ с наибольшим числом ребер (Иначе вернув ребро $\{c, d\}$ получили бы паросочетание больше, чем M). Новое T — это $T \setminus \{c, d\}$, новое S — это $S \setminus \{a\}$ (При этом по-прежнему $|S| > |M| + 2 \geq 2$). Рассматривая как и выше новые $a, b \in S$ и $\{c, d\} \in M$, ставим a, c, d в список под номерами $4, 5, 6$. (4 и 5 созванивались)

Действуя так и далее, получим такой список длины $3 \cdot |M|$, в котором для любого числа $k \in \{1, 2, ..., |M|\}$ жители с номерами $3k-2, 3k-1$ в этом списке, когда-то созванивались. Кроме того, остается, еще $300000 - 3 \cdot |M|$ жителей из оставщегося множества S, а они созванивались каждый с каждым. Добавим их в конец списка в произвольном порядке и получим требуемый список.

Старшая лига. Группа 1

1. Найдите все такие целые n, что $\frac{n}{n-2024}$ является квадратом целого числа.

   Ответ: $n \in \{0, 2025, 2277\}$

   Решение. Пусть $\frac{n}{n-2024} = k^2$, для целого неотрицательного k. Если $k = 0$, то $n = 0$, иначе k — натуральное. Тогда $\frac{2024}{n-2024} = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, т.е. $(k-1)$ и $(k+1)$ — натуральные делители числа 2024, отличающиеся на 2. $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ имеет 16 натуральных делителей: $1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024$, среди которых ровно две пары отличающихся на 2, что дает $k = 3$ или $k = 45$. Отсюда $n - 2024$ равно либо 253, либо 1, т.е. n это либо 2277, либо 2025.

2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ с действительными коэффициентами *оскорбительный*, если уравнению $f(f(x)) = 0$ удовлетворяют ровно три действительных числа. Среди всех оскорбительных квадратных трехчленов есть единственный такой $F(x)$, у которого сумма корней максимальна. Чему равно $F(1)$?

   Ответ: $\frac{5}{16}$.

   Решение.

   Пусть r_1 и r_2 будут корнями $F(x)$. Тогда $F(x) = (x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$. Решения $F(F(x)) = 0$ это объединения решений $F(x) - r_1 = x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_1) = 0$ и $F(x) - r_2 = x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_2) = 0$. Заметим, что один из этих двух квадратичных уравнений имеет одно решение (кратный корень), а другой – два, поскольку существует ровно три решения. Б.о.о. квадратное уравнение с одним корнем $x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_1) = 0$. Тогда его дискриминант равен 0, поэтому $(r_1 + r_2)^2 = 4r_1 r_2 - 4r_1$, откуда $r_1 - r_2 = \pm 2\sqrt{-r_1}$.

   Чтобы уравнение $x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 r_2 - r_2) = 0$ имело два решения, необходимо чтобы дискриминант $(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 + 4r_2$ был положительным. Отсюда мы получаем что $(r_1 - r_2)^2 > -4r_2$, значит $-4r_1 > -4r_2$, откуда $r_1 < r_2$, значит $r_1 - r_2$ – отрицательно, поэтому $r_1 - r_2 = -2\sqrt{-r_1}$. Сумма корней $F(x)$ есть $2r_1 + 2\sqrt{-r_1}$, максимальное значение которого при $r_1 = -\frac{1}{4}$. Тогда $r_2 = \frac{3}{4}$, и, $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$, откуда $F(1) = \frac{5}{16}$.

3. Аня и Ваня раскладывают натуральное число N всевозможными способами в сумму нескольких натуральных слагаемых (разложения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными). При этом Аня подбирает только такие разложения, где все слагаемые нечетны, а Ваня — такие разложения, в которых первое слагаемое не меньше второго, третье — не меньше четвертого, пятое не меньше шестого и т.д. (в случае, когда число слагаемых оказалось нечетным, на последнее слагаемое ограничений нет). У кого количество разложений будет больше?

Ответ: у Вани при всех N, кроме 1 (при $N = 1$ у обоих ровно одно разложение).

Решение. Покажем, что число разложений у Ани равно числу тех разложений у Вани, в которых каждое нечетное слагаемое строго больше, чем следующее за ним четное слагаемое. Кроме таких разложений у Вани еще есть те, у которых первое и второе слагаемое равны.

Построим биекцию между множествами разбиений. Пусть у нас есть разбиение N, в котором каждое слагаемое с нечётным номером больше следующего. Разобьём эти слагаемые на пары соседних (последнее слагаемое может остаться без пары; в таком случае допишем ему в пару нулевое слагаемое). Паре слагаемых (a, b) $(a > b)$ мы сопоставим нечётные слагаемые 1, 1,. . . , 1, $2b + 1$ (количество единиц равно $b - a - 1$). Обратно, пусть есть разбиение на нечётные слагаемые. Разделим их на блоки: каждый блок состоит из нескольких (возможно, нуля) единиц и заканчивается неединичным слагаемым $2b + 1$. Заменим этот блок на пару слагаемых a и b с сохранением суммы. Очевидно, что эти соответствия взаимно обратны.

Однако Ване подходит и разбиение, например, на все 1, поэтому при всех N, кроме 1, у него разбиений больше.

4. Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На прямых AB и BC выбраны точки P и Q соответственно так, что $BP = CP$ и $BQ = AQ$. Отрезки PQ и AC пересекаются в точке R. Докажите, что биссектриса угла между прямыми OH и BR образует угол 45° с биссектрисой угла ABC.

   *Решение.*Поскольку $\angle(AP, AQ) = \angle(QB, BP) = \angle(CP, CQ)$, то точки A, C,P, Q лежат на одной окружности. Пусть прямая BR вторично пересекает окружность (ABC) в точке X. Тогда $RB \cdot RX = RA \cdot RC = RP \cdot RQ$, откуда четырехугольник $PBQX$ вписанный. Будем использовать следующий известный факт: Если прямая ℓ проходит через ортоцентр треугольника, то прямые, симметричные ℓ относительно сторон, пересекаются на описанной окружности. Заметим, что O — ортоцентр треугольника PBQ. Используя вышеприведенный факт получаем, что прямые, симметричные OH относительно AB и BC, пересекаются на окружности (ABC) и на окружности (PBQ). Поскольку эти прямые не проходят через точку B, они пересекаются в точке X. Пусть X_1 и X_2 точки симметричные X относительно AB и B соответсвенно. Из доказанного выше следует, что X_1 и X_2 лежат на прямой OH. Пусть K и L — проекции X на AB и BC соответственно. Тогда KL — средняя линия треугольника XX_1X_2. Значит, $OH||KL$. Пусть m — биссектриса угла ABC. Достаточно доказать, что $\angle(OH, m)+\angle(BR, m) = 90°$, т.е. что $\angle(KL, m)+\angle(BX, m) = 90°$. Имеем $\angle(KL, m)+\angle(BX, m) = \angle(KL, KB)+\angle(BX, BL) = \angle(XL, XB)+\angle(BX, BL) = 90°$.

5. Для положительных чисел a, b, c выполняется условие $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что
$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leqslant 4.$$

   Решение.
$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} = a + \frac{ab^3}{a^3 + 2b^3} \leqslant a + \frac{ab^3}{3ab^2} = a + \frac{b}{3}.$$

   Так как $a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geqslant 3ab^2$ по неравенству о средних. Сложив три полученных неравенства, сведем доказательство к доказательству неравенства $\frac{4}{3}(a+b+c) \leqslant 4$, а это верно, так как $a + b + c \leqslant 3\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/3} = 3$

6. Целой частью числа t называется наибольшее целое число, не превосходящее t, обозначается она через $[t]$ (например, $[-1,2] = -2$, $[1,8] = 1$). Вещественное число $x \leqslant 1$ и натуральное n таковы, что все числа $[x^{n+1}]$, $[x^{n+2}]$,..., $[x^{4n}]$ — точные квадраты (т.е являются квадратами некоторых целых чисел). Обязательно ли $[x]$ — точный квадрат?

   Ответ: да, обязательно.

   *Решение.*Допустим, что $x < 0$, тогда $[x^{4n-1}] \leqslant x^{4n-1} < 0$, и, значит, $[x^{4n-1}]$ не может быть точным квадратом. Следовательно, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Отсюда $[x] \in \{0, 1\}$ — точный квадрат.