СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 ХБ класс
06 апреля 2024г.
Вариант 1

1. Вычислить
$$\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3\right)}{2-\sqrt{3}}.$$

2. Упростить выражение
$$\frac{1}{2t+5}-\frac{2}{25-10t}-\frac{4}{4t^2-25}.$$

3. Цена билета в цирк равна 200 рублей. После снижения цены число зрителей увеличилось на 25%, а выручка выросла на $12,5\%$. Сколько стал стоить билет, если изначально был по крайней мере один зритель?

4. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{4x-3}{3}-\frac{8x-2}{5}>-\frac{8}{7}.$$

5. Сумма двух числе равна 2490. Найдите эти числа, если 8,5% одного из них равны 6,5% другого.

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти отрезки на которые точка D делит гипотенузу, если $AC=4$, а $BC=3$.

7. Решите уравнение
$$(2x+8)^2(13x-39)=26(4x^2-64)(x-3).$$

8. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

9. Найдите число $x<0$, если $x^2=542\cdot 544+1$.

10. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB=5$, $BC=7$, $AC=11$.

11. Решите уравнение
$$\frac{5x^2-7x+2}{4x^2+x-5}=\frac{(4x-5)^2}{16x^2-25}.$$

12. Построить график функции $y=\dfrac{|x-2|}{2-x}\cdot(x^2-2x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y=-2x+4$.

13. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $2x^2-4x-2\geq a$ верно для любого действительного x.

14. Основание AD трапеции $ABCD$ равно 12, $\angle ABD=\angle BCD$, диагональ BD равна 6. Найдите площадь треугольника BCD, если площадь трапеции равна 40.

15. Из города в одном направлении выезжают три автомобиля с интервалом 30 минут. Первый едет со скоростью 50 км/ч, второй – 40 км/ч. Третий автомобиль догоняет второй, а еще через 4 часа догоняет первый. Найдите скорость третьего автомобиля.

СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 ХБ класс
06 апреля 2024г.
Вариант 2

1. Вычислить
$$\frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2\right)}{\sqrt{2}+1}.$$

2. Упростить выражение
$$\frac{c+2}{2c-4}-\frac{2-c}{6+3c}+\frac{5c^2+12}{24-6c^2}.$$

3. Цена входного билета в парк 150 рублей. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор на 25%. На сколько рублей изменилась цена билета, если изначально был по крайней мере один зритель?

4. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{5x-1}{4}-\frac{8x-3}{5}>-\frac{3}{2}.$$

5. Известно, что 5% первого числа и 4% второго составляют в сумме 44, а 4% первого числа и 5% второго составляют в сумме 46. Найдите эти числа.

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти AC и AB, если $CD=3$, а $CB=5$.

7. Решите уравнение
$$(x-1)^2(8x-9)=4(x^2-1)(x-1{,}125).$$

8. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и девяток. Сейф откроется, если двоек больше, чем девяток, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

9. Найдите целое число $x>0$, если $x^2=734\cdot 738+4$.

10. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB=7$, $BC=9$, $AC=13$.

11. Решите уравнение
$$\frac{3x^2+4x-4}{2x^2-x-10}=\frac{(2x+5)^2}{4x^2-25}.$$

12. Построить график функции $y=\dfrac{|x-1|}{1-x}\cdot(-x^2+x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y=2x-2$.

13. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $4x^2-8x-1\geq a$ верно для любого действительного x.

14. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 12, $\angle ADC=\angle BAC$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника ADC равна 36.

15. Из города в одном направлении выезжают одновременно две машины. Скорость первой машины 50 км/ч, второй – 60 км/ч. Через час из этого же города выезжает третья машина, которая догоняет вторую на 1 час 20 минут позже, чем первую. Найдите скорость третьей машины.

Решения и критерии оценивания
Вариант №1

1. Вычислить
$$\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3\right)}{2-\sqrt{3}}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3\right)}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3})\right)}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}=15-3=12.$$

Ответ: 12.

2. Упростить выражение
$$\frac{1}{2t+5}-\frac{2}{25-10t}-\frac{4}{4t^2-25}.$$

Решение.

$$\frac{1}{2t+5}-\frac{2}{25-10t}-\frac{4}{4t^2-25}=\frac{1}{2t+5}+\frac{2}{5(2t-5)}-\frac{4}{(2t-5)(2t+5)}=$$
$$=\frac{5(2t-5)+2(2t+5)-20}{5(2t-5)(2t+5)}=\frac{14t-35}{5(2t-5)(2t+5)}=\frac{7(2t-5)}{5(2t-5)(2t+5)}=\frac{7}{5(2t+5)}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{5(2t+5)}$.

3. Цена билета в цирк равна 200 рублей. После снижения цены число зрителей увеличилось на 25%, а выручка выросла на 12,5%. Сколько стал стоить билет, если изначально был по крайней мере один зритель?

Решение.

Пусть x – количество зрителей до понижения цены, тогда $1{,}25x$ – количество зрителей после понижения цены на билет. Если y – новая цена билета, то получаем уравнение $1{,}25x\cdot y=200x\cdot 1{,}125$, откуда $y=180$.

Ответ: 180.

4. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{4x-3}{3}-\frac{8x-2}{5}>-\frac{8}{7}.$$

Решение.

Умножим обе части неравенства на 105, получим неравенство
$$35(4x-3)-21(8x-2)>-120 \quad\Leftrightarrow\quad -28x>-57,$$
откуда $x<\frac{57}{28}$. Наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $x=2$.

Ответ: 2.

Критерии: *1 балл* – за ответ $x<\frac{57}{28}$.

5. Сумма двух числе равна 2490. Найдите эти числа, если 8,5% одного из них равны 6,5% другого.
Решение.
Пусть эти числа x и y, тогда $x + y = 2490$ и $0{,}085x = 0{,}065y$ или $17x = 13y$. Получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 2490 \\ 17x - 13y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x + 17y = 17 \cdot 2490 \\ 17x - 13y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30y = 17 \cdot 2490 \\ 17x - 13y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1411 \\ x = 1079. \end{cases}$$

Ответ: 1079 и 1411.

Критерии: *1 балл* – только одно из чисел верно.

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти отрезки на которые точка D делит гипотенузу, если $AC = 4$, а $BC = 3$.
Решение.
По теореме Пифагора $AB^2 = BC^2 + CA^2$, откуда $AB = 5$. Из метрических соотношений в прямоугольном треугольнике следует, что $BC^2 = AB \cdot BD$, откуда $BD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{9}{5}$. Аналогично, $CA^2 = AB \cdot AD$, откуда $AD = \frac{CA^2}{AB} = \frac{16}{5}$.

Ответ: $\frac{9}{5}$ и $\frac{16}{5}$.

Критерии: *1 балл* – только одно из чисел верно.

7. Решите уравнение

$$(2x + 8)^2(13x - 39) = 26(4x^2 - 64)(x - 3).$$

Решение.
Разложим обе части уравнения на множители

$$13(2x + 8)^2(x - 3) = 26(2x + 8)(2x - 8)(x - 3).$$

Получаем, что либо $2x + 8 = 0$, либо $x - 3 = 0$, либо $13(2x + 8) = 26(2x - 8)$. Решая каждое из уравнения получаем, что либо $x = -4$, $x = 3$ и $x = 12$.
Ответ: $-4; 3; 12$.

Критерии: *1 балл* – за каждый верно найденный корень.

8. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.
Решение. Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр – 17, во втором – 16, в третьем – 15, а в последнем – 14. По признаку делимости на 3 годится только третий вариант. Итак, в коде 6 двоек и одна тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, равно 32.
Ответ: 2222232.

9. Найдите число $x < 0$, если $x^2 = 542 \cdot 544 + 1$.
Решение.

$$x^2 = (543 - 1)(543 + 1) + 1 \Leftrightarrow x^2 = 543^2.$$

Учитывая, что $x < 0$ получаем $x = -543$.
Ответ: -543.

10. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 11$.
Решение.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ACC_2 и AA_2C в них C_2B_1 и A_2B_1 соответственно будут медианами, опущенными из вершины прямого угла, а значит $C_2B_1 = A_2B_1 = \frac{AC}{2}$. Аналогично для пар треугольников BC_2C, BB_2C и BA_2A, BB_2A. Тогда длина ломанной будет равна $2 \cdot (\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2}) = 5 + 7 + 11 = 23$.

Ответ: 23.

11. Решите уравнение

$$\frac{5x^2 - 7x + 2}{4x^2 + x - 5} = \frac{(4x-5)^2}{16x^2 - 25}.$$

Решение. Разложим на множители числитель и знаменатель каждой дроби

$$\frac{(5x-2)(x-1)}{(4x+5)(x-1)} = \frac{(4x-5)^2}{(4x-5)(4x+5)}.$$

Учитывая, что $x \neq 1$ и $x \neq \frac{4}{5}$ получаем уравнение $\dfrac{5x-2}{4x+5} = \dfrac{4x-5}{4x+5}$. Дополнительно учитывая, что $x \neq -\frac{4}{5}$ получаем, что $5x - 2 = 4x - 5$, откуда $x = -3$.

Ответ: -3.

Критерии:

5 баллов – обоснованно получен верный ответ;

+1 балл – за каждое верно разложение на множители квадратного трехчлена;

+1 балл – за верное приведение к общему знаменателю и приведение подобных в числителе полученной дроби.

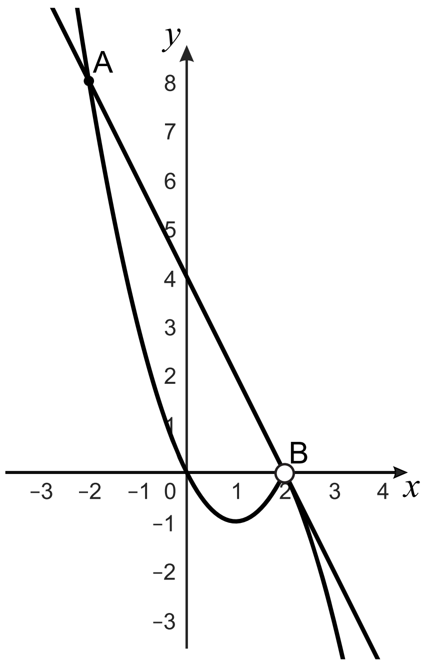
12. Построить график функции $y = \dfrac{|x-2|}{2-x} \cdot (x^2 - 2x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y = -2x + 4$.

Решение. При условии $x > 2$ получаем, что $y = -(x^2 - 2x)$, а при условии $x < 2$ получаем, что $y = x^2 - 2x$. Построим график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} -(x^2 - 2x) & \text{при } x > 2 \\ x^2 - 2x & \text{при } x < 2. \end{cases}$$

и график прямой $y = -2x + 4$. Заметим, что прямая пересекает график данной функции только в точке A и найдем её координаты решив уравнение $x^2 - 2x = -2x + 4$. Корнями уравнения будут числа $x_1 = 2$ – посторонний корень, и $x_2 = -2$. Значит точка A имеет координаты $(-2; 8)$.

Ответ: $(-2; 8)$.



Критерии:

+2 балла – получение верной кусочно-заданной функции;

+2 балла – за построение графика кусочно-заданной функции;

+1 балл – за обоснованное нахождение точки пересечения графиков функций.

13. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $2x^2 - 4x - 2 \geq a$ верно для любого действительного x.

Решение. Неравенство $2x^2 - 4x - 2 - a \geq 0$ верно для любых действительных значений x, если дискриминант соответствующего квадратного уравнения неположительный. Получаем $D = 16 - 8(-2 - a) \leq 0$, откуда $a \leq -4$. Значит наибольшим значением параметра будет $a = -4$.

Ответ: -4.

14. Основание AD трапеции $ABCD$ равно 12, $\angle ABD = \angle BCD$, диагональ BD равна 6. Найдите площадь треугольника BCD, если площадь трапеции равна 40.

Решение. Рассмотрим треугольники ABD и BCD: $\angle ABD = \angle BCD$ (по условию); $\angle ADB = \angle CBD$ (как накрест лежащие углы), значит $\triangle\ ABD \sim \triangle\ BCD$. Причем коэффициент подобия равен $\frac{AD}{BD} = 2$. Тогда, если $S_{BCD} = S$, то $S_{ABD} = 4S$. Получаем, что $S_{ABCD} = 5S = 40$, откуда $S = 8$.

Ответ: 8.

Критерии:

+2 балла – доказано подобие треугольников ABC и BCD;
+1 балл – найден коэффициент подобия;
+2 балла – обоснованно найдена искомая площадь.

15. Из города в одном направлении выезжают три автомобиля с интервалом 30 минут. Первый едет со скоростью 50 км/ч, второй – 40 км/ч. Третий автомобиль догоняет второй, а еще через 4 часа догоняет первый. Найдите скорость третьего автомобиля.

Решение. Пусть скорость третьего автомобиля x $(x > 50)$ км/ч, время через которое он догонит второй автомобиль y часов, тогда первый автомобиль он догонит через $y+4$ часа. Второй автомобиль за 1/2 часа успел отдалиться от третьего на 20 км, скорость третьего автомобиля относительно первого равна $x - 40$, получаем уравнение первое $y = \frac{20}{x-40}$. Скорость с которой третий автомобиль будет догонять первый равна $x - 50$, а расстояние, на которое успел уехать первый автомобиль равно 50 км, тогда $y + 4 = \frac{50}{x-50}$. Получаем уравнение

$$\frac{20}{x-40} + 4 = \frac{50}{x-50} \Leftrightarrow 20(x-50) + 4(x-40)(x-50) = 50(x-40) \Leftrightarrow 4x^2 - 390x + 9000 = 0.$$

Корни которого $x_1 = 37{,}5 < 50$ – не подходит и $x_2 = 60$. Ответ: 60 км/ч.

Критерии:

+2 балла – верно составлено уравнение;
+2 балла – верно решено рациональное уравнение;
+1 балл – получен верный ответ.

Решения и критерии оценивания
Вариант №2

1. Вычислить
$$\frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2\right)}{\sqrt{2}+1}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2\right)}{\sqrt{2}+1}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{2}(\sqrt{17}+2)+(\sqrt{17}+2)\right)}{\sqrt{2}+1}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{17}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}=17-4=13.$$

Ответ: 13.

2. Упростить выражение
$$\frac{c+2}{2c-4}-\frac{2-c}{6+3c}+\frac{5c^2+12}{24-6c^2}.$$

Решение.

$$\frac{c+2}{2c-4}-\frac{2-c}{6+3c}+\frac{5c^2+12}{24-6c^2}=\frac{c+2}{2(c-2)}+\frac{c-2}{3(c+2)}-\frac{5c^2+12}{6(c-2)(c+2)}=$$
$$=\frac{3(c+2)^2+2(c-2)^2-5c^2-12}{6(c-2)(c+2)}=\frac{4c+8}{6(c-2)(c+2)}=\frac{4(c+2)}{6(c-2)(c+2)}=\frac{2}{3(c-2)}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{3(c-2)}$.

3. Цена входного билета в парк 150 рублей. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор на 25%. На сколько рублей изменилась цена билета, если изначально был по крайней мере один зритель?

Решение.

Пусть x – количество зрителей до понижения цены, тогда $1{,}5x$ – количество зрителей после понижения цены на билет. Если y – новая цена билета, то получаем уравнение $1{,}5x\cdot y=150x\cdot 1{,}25$, откуда $y=125$. Значит,

Ответ: 25.

4. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{5x-1}{4}-\frac{8x-3}{5}>-\frac{3}{2}.$$

Решение.

Умножим обе части неравенства на 20, получим неравенство
$$5(5x-1)-4(8x-3)>-30 \quad\Leftrightarrow\quad -7x>-37,$$
откуда $x<\frac{37}{7}$. Наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $x=5$.

Ответ: 5.

Критерии: *1 балл* – за ответ $x<\frac{37}{7}$.

5. Известно, что 5% первого числа и 4% второго составляют в сумме 44, а 4% первого числа и 5% второго составляют в сумме 46. Найдите эти числа.

Решение.

Пусть эти числа x и y, тогда $0{,}05x + 0{,}04y = 44$ и $0{,}04x + 0{,}05y = 46$. Получаем систему

$$\begin{cases} 5x + 4y = 4400 \\ 4x + 5y = 4600, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 20y = 5 \cdot 4400 \\ 16x + 20y = 4 \cdot 4600, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 5 \cdot 4400 - 4 \cdot 4600 \\ 4x + 5y = 4600, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 600. \end{cases}$$

Ответ: $(400; 600)$.

Критерии: *1 балл* – только одно из чисел верно.

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти AC и AB, если $CD = 3$, а $CB = 5$.

Решение.

По теореме Пифагора $BC^2 = CD^2 + DB^2$, откуда $BD = 4$. Из метрических соотношений в прямоугольном треугольнике следует, что $BC^2 = AB \cdot BD$, откуда $AB = \frac{BC^2}{BD} = \frac{25}{4}$. По теореме Пифагора $AB^2 = BC^2 + CA^2$, откуда $AC = \frac{15}{4}$.

Ответ: $\frac{15}{4}$ и $\frac{25}{4}$.

Критерии: *1 балл* – только одно из чисел верно.

7. Решите уравнение

$$(x-1)^2(8x-9) = 4(x^2-1)(x-1{,}125).$$

Решение.

Разложим обе части уравнения на множители

$$8(x-1)^2(x-1{,}125) = 4(x-1)(x+1)(x-1{,}125).$$

Получаем, что либо $x - 1 = 0$, либо $x - 1{,}125 = 0$, либо $8(x-1) = 4(x+1)$. Решая каждое из уравнения получаем, что либо $x = 1$, $x = 1{,}125$ и $x = 3$.

Ответ: $1; 1{,}125; 3$.

Критерии: *1 балл* – за каждый верно найденный корень.

8. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и девяток. Сейф откроется, если двоек больше, чем девяток, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

Решение. Так как двоек больше, чем девяток, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр – 35, во втором – 28, в третьем – 21, а в последнем – 14. По признаку делимости на 3 годится только третий вариант. Итак, в коде 6 двоек и одна девятка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, равно 92.

Ответ: 2222292.

9. Найдите целое число $x > 0$, если $x^2 = 734 \cdot 738 + 4$.

Решение.

$$x^2 = (736-2)(736+2) + 4 \Leftrightarrow x^2 = 736^2;$$

Учитывая, что $x > 0$ получаем $x = 736$.

Ответ: 736.

10. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 13$.

Решение.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ACC_2 и AA_2C в них C_2B_1 и A_2B_1 соответственно будут медианами, опущенными из вершины прямого угла, а значит $C_2B_1 = A_2B_1 = \frac{AC}{2}$. Аналогично для пар треугольников BC_2C, BB_2C и BA_2A, BB_2A. Тогда длина ломанной будет равна $2 \cdot (\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2}) = 7 + 9 + 13 = 29$.

Ответ: 23.

11. Решите уравнение

$$\frac{3x^2+4x-4}{2x^2-x-10} = \frac{(2x+5)^2}{4x^2-25}.$$

Решение. Разложим на множители числитель и знаменатель каждой дроби

$$\frac{(x+2)(3x-2)}{(x+2)(2x-5)} = \frac{(2x+5)^2}{(2x-5)(2x+5)}.$$

Учитывая, что $x \neq -2$ и $x \neq -\frac{5}{2}$ получаем уравнение $\dfrac{3x-2}{2x-5} = \dfrac{2x+5}{2x-5}$. Дополнительно учитывая, что $x \neq \frac{5}{2}$ получаем, что $3x - 2 = 2x + 5$, откуда $x = 7$.

Ответ: 7.

Критерии:

5 баллов – обоснованно получен верный ответ;

+1 балл – за каждое верно разложение на множители квадратного трехчлена;

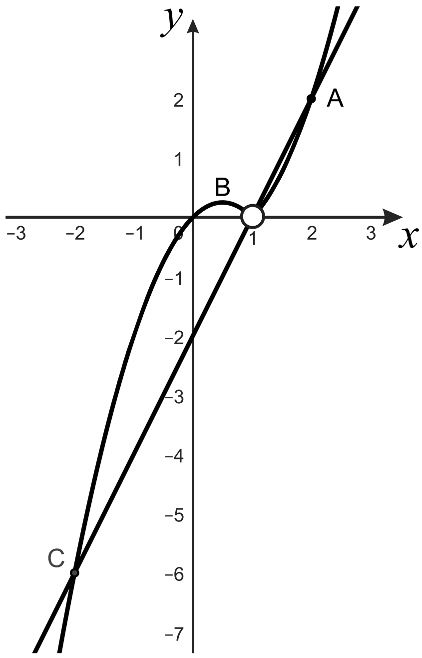
+1 балл – за верное приведение к общему знаменателю и приведение подобных в числителе полученной дроби.

12. Построить график функции $y = \dfrac{|x-1|}{1-x} \cdot (-x^2 + x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y = 2x - 2$.

Решение. При условии $x > 1$ получаем, что $y = x^2 - x$, а при условии $x < 1$ получаем, что $y = -x^2 + x$. Построим график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} x^2 - x & \text{при } x > 1 \\ -x^2 + x & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

и график прямой $y = 2x - 2$. Заметим, что прямая пересекает график данной функции в точках A и C найдем их координаты решив уравнения $x^2 - x = 2x - 2$ и $-x^2 + x = 2x - 2$. Корнями первого уравнения будут числа $x_1 = 1$ – посторонний корень, и $x_2 = 2$, значит точка A имеет координаты $(2; 2)$; корнями второго уравнения будут числа $x_1 = 1$ – посторонний корень, и $x_2 = -2$, значит точка C имеет координаты $(-2; -6)$.



Ответ: $(2; 2)$ и $(-2; -6)$.

Критерии:

+2 балла – получение верной кусочно-заданной функции;

+2 балла – за построение графика кусочно-заданной функции;

+1 балл – за обоснованное нахождение точек пересечения графиков функций.

13. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $4x^2 - 8x - 1 \geq a$ верно для любого действительного x.

Решение. Неравенство $4x^2 - 8x - 1 - a \geq 0$ верно для любых действительных значений x, если дискриминант соответствующего квадратного уравнения неположительный. Получаем $D = 64 - 16(-1 - a) \leq 0$, откуда $a \leq -5$. Значит наибольшим значением параметра будет $a = -5$.

Ответ: -5.

14. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 12, $\angle ADC = \angle BAC$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника ADC равна 36.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и DCA: $\angle BAC = \angle CDA$ (по условию); $\angle ACB = \angle DAC$ (как накрест лежащие углы), значит $\triangle\ ABC \sim\triangle\ DCA$. Причем коэффициент подобия равен $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Тогда, если $S_{ABC} = \frac{4}{9}S_{ACD} = 16$. Получаем, что $S_{ABCD} = 16 + 36 = 52$.

Ответ: 52.

Критерии:

+2 балла – доказано подобие треугольников ABC и BCD;

+1 балл – найден коэффициент подобия;

+2 балла – обоснованно найдена искомая площадь.

15. Из города в одном направлении выезжают одновременно две машины. Скорость первой машины 50 км/ч, второй – 60 км/ч. Через час из этого же города выезжает третья машина, которая догоняет вторую на 1 час 20 минут позже, чем первую. Найдите скорость третьей машины.

Решение. Пусть скорость третьей машины x $(x > 60)$ км/ч, время через которое она догонит первую машину y часов, тогда вторую машину она догонит через $y + \frac{4}{3}$ часа. Первая машина за 1 час успела отдалиться от третьей на 50 км, скорость третьей машины относительно первой равна $x - 50$? получаем уравнение первое $y = \frac{50}{x-50}$. Вторую машину третья будет догонять со скоростью $x - 60$, а расстояние, на которое успела уехать вторая машина равно 60 км, тогда $y + \frac{4}{3} = \frac{60}{x-60}$. Получаем уравнение

$$\frac{50}{x-50} + \frac{4}{3} = \frac{60}{x-60}. \Leftrightarrow 150(x-60) + 4(x-50)(x-60) = 180(x-50) \Leftrightarrow 2x^2 - 235x + 6000 = 0.$$

Корни которого $x_1 = 37{,}5 < 60$ – не подходит и $x_2 = 80$.

Ответ: 80 км/ч.

Критерии:

+2 балла – верно составлено уравнение;

+2 балла – верно решено рациональное уравнение;

+1 балл – получен верный ответ.