Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Сумма

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 ФМ, МИ классы
06 апреля 2024г.
Вариант 1

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все. Если ответом является дробь, то ее следует привести к несократимой (например, вместо $\frac{24}{18}$ записать $\frac{4}{3}$), в неправильной дроби (т.е. числитель которой больше знаменателя) целую часть можно не выделять. Калькулятором, литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя.

1. *(2 балла)* Найти число, если 37% его равны $(8{,}7 - 0{,}28 : 0{,}4) \cdot \dfrac{37}{12}$.
Ответ:____________________

2. *(3 балла)* Упростить выражение

$$\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a} - \frac{2-a}{1-8a^3} \cdot \frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right) : \left(\frac{1}{1-2a}\right)^2 - \frac{8a-1}{2a^2+a}.$$

Ответ:________________

3. *(3 балла)* Цена билета в цирк равна 200 рублей. После снижения цены число зрителей увеличилось на 25%, а выручка выросла на $12,5\%$. Сколько стал стоить билет, если изначально был по крайней мере один зритель?
Ответ:____________________

4. *(2 балла)* Решить неравенство

$$2(3x-5)(x-1) - 3\left(1 - (2x+1)(3-x) + \frac{4-x}{2}\right) < 13.$$

Ответ:____________________

5. *(3 балла)* Шестизначное число начинается цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите данное число.
Ответ:____________________

6. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти отрезки на которые точка D делит гипотенузу, если $AC = 4$, а $BC = 3$.
Ответ:____________________

7. *(3 балла)* Найдите все решения уравнения $(x - |x|)^2 + 2020\,(x + |x|) = 2020$.
Ответ:____________________

8. *(3 балла)* Вычислить

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{10+\sqrt{99}}.$$

Ответ:____________________

9. *(3 балла)* Найдите число $x<0$, если $x^2=542\cdot 544+1$.

Ответ:____________________

10. *(3 балла)* В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB=5$, $BC=7$, $AC=11$.

Ответ:____________________

Часть 2

В заданиях 11–15 привести полные решения.

11. *(4 балла)* Известно, что $\sqrt{28-a}-\sqrt{13-a}=3$. Найдите $\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a}$.

12. *(5 баллов)* Построить график функции $y=\dfrac{|x-2|}{2-x}\cdot(x^2-2x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y=-2x+4$.

13. *(5 баллов)* При каких значениях параметра a решением системы неравенств $\begin{cases} 2x+3a\leqslant 1,\\ 2-x\leqslant a\end{cases}$ будет отрезок не менее 2.

14. *(4 балла)* Основание AD трапеции $ABCD$ равно 12, $\angle ABD=\angle BCD$, диагональ BD равна 6. Найдите площадь треугольника BCD, если площадь трапеции равна 40.

15. *(5 баллов)* Из города в одном направлении выезжают три автомобиля с интервалом 30 минут. Первый едет со скоростью 50 км/ч, второй – 40 км/ч. Третий автомобиль догоняет второй, а еще через 4 часа догоняет первый. Найдите скорость третьего автомобиля.

Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Сумма

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 ФМ, МИ классы
06 апреля 2024г.
Вариант 2

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все. Если ответом является дробь, то ее следует привести к несократимой (например, вместо $\frac{24}{18}$ записать $\frac{4}{3}$), в неправильной дроби (т.е. числитель которой больше знаменателя) целую часть можно не выделять. Калькулятором, литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя.

1. *(2 балла)* Найти число, если 37% его равны $\left(3{,}375 : \dfrac{3}{16} + \dfrac{5}{6} \cdot 0{,}6\right)$.

Ответ:____________________

2. *(3 балла)* Упростить выражение

$$\left(a^2 - b^2\right) \cdot \left(\frac{2a^2b + 2ab^2}{7a^3 + a^2b + 7ab^2 + b^3} \cdot \frac{7a+b}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+b^2}\right).$$

Ответ:____________________

3. *(3 балла)* Цена входного билета в парк 150 рублей. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор на 25%. На сколько рублей изменилась цена билета, если изначально был по крайней мере один зритель?

Ответ:____________________

4. *(2 балла)* Решить неравенство

$$3\left(x - 1 + \frac{4-3x}{4} - \left(1 - 2 \cdot \left(x - 1 - \frac{x+2}{5}\right)\right)\right) > 5x - 7.$$

Ответ:____________________

5. *(3 балла)* Шестизначное число начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите данное число.

Ответ:____________________

6. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти AC и AB, если $CD = 3$, а $CB = 5$.

Ответ:____________________

7. *(3 балла)* Найдите все решения уравнения $(x - |x|)^2 + 2304(x + |x|) = 2304$.

Ответ:____________________

8. *(3 баллов)* Вычислить

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{11+\sqrt{119}}\,.$$

Ответ:___________________

9. *(3 балла)* Найдите целое число $x>0$, если $x^2=734\cdot 738+4$.
Ответ:___________________

10.*(3 балла)* В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB=7$, $BC=9$, $AC=13$.
Ответ:___________________

Часть 2

В заданиях 11–15 привести полные решения.

11. *(4 балла)* Известно, что $\sqrt{39-a}+\sqrt{27-a}=4$. Найдите $\sqrt{39-a}-\sqrt{27-a}$.

12. *(5 баллов)* Построить график функции $y=\dfrac{|x-1|}{1-x}\cdot(-x^2+x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y=2x-2$.

13. *(5 баллов)* При каких значениях параметра a решением системы неравенств $\begin{cases} x-a\geqslant 1,\\ x+a\leqslant 3\end{cases}$ будет отрезок не более 4.

14. *(4 балла)* Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 12, $\angle ADC=\angle BAC$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника ADC равна 36.

15. *(5 баллов)* Из города в одном направлении выезжают одновременно две машины. Скорость первой машины 50 км/ч, второй – 60 км/ч. Через час из этого же города выезжает третья машина, которая догоняет вторую на 1 час 20 минут позже, чем первую. Найдите скорость третьей машины.

Решение.
Вариант 1.
Часть 1.

1. *(2 балла)* Найти число, если 37% его равны $(8{,}7-0{,}28:0{,}4)\cdot\dfrac{37}{12}$.

Решение.

$$\left((8{,}7-0{,}28:0{,}4)\cdot\frac{37}{12}\right):0{,}37=(8{,}7-0{,}7)\cdot\frac{100}{12}=\frac{8\cdot 100}{12}=\frac{200}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{200}{3}$.

2. *(3 балла)* Упростить выражение

$$\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\frac{2-a}{1-8a^3}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\frac{1}{1-2a}\right)^2-\frac{8a-1}{2a^2+a}.$$

Решение.

$$\left(\frac{a+2}{a(2a-1)^2}+\frac{2-a}{(-1+2a)(4a^2+2a+1)}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right)\cdot\left(\frac{(1-2a)^2}{1}\right)-\frac{8a-1}{a(2a+1)}=$$

$$=\left(\frac{(a+2)(2a-1)^2}{a(2a-1)^2}+\frac{(2-a)(2a-1)^2}{a(-1+2a)(2a+1)}\right)-\frac{8a-1}{a(2a+1)}=$$

$$=\left(\frac{(a+2)(2a+1)}{a(2a+1)}+\frac{(2-a)(2a-1)}{a(2a+1)}\right)-\frac{8a-1}{a(2a+1)}=$$

$$=\frac{2a^2+a+4a+2-2-2a^2+a+4a-8a+1}{a(2a+1)}=\frac{2a+1}{a(2a+1)}=\frac{1}{a}.$$

Ответ: $\frac{1}{a}$.

3. *(3 балла)* Цена билета в цирк равна 200 рублей. После снижения цены число зрителей увеличилось на 25%, а выручка выросла на $12,5\%$. Сколько стал стоить билет, если изначально был по крайней мере один зритель?

Решение.

Пусть x – количество зрителей до понижения цены, тогда $1{,}25x$ – количество зрителей после понижения цены на билет. Если y – новая цена билета, то получаем уравнение $1{,}25x\cdot y=200x\cdot 1{,}125$, откуда $y=180$.

Ответ: 180.

4. *(2 балла)* Решить неравенство

$$2(3x-5)(x-1)-3\left(1-(2x+1)(3-x)+\frac{4-x}{2}\right)<13.$$

Решение.

$$6x^2-16x+10-3\left(1-(5x-2x^2+3)+\frac{4-x}{2}\right)<13;$$
$$6x^2-16x+10+15x-6x^2-\frac{3(4-x)}{2}<13;$$
$$-x+16-\tfrac{12-3x}{2}<13;$$
$$-2x+32-12+3x<26;$$
$$x<6.$$

Ответ: $x<6$.

5. *(3 балла)* Шестизначное число начинается цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите данное число.

Решение.

Рассмотрим число $\overline{1abcde}$ и заменим $\overline{abcde}$ на x и тогда представим это число в виде $1\cdot 10^5+x$. Если перенести цифру 1 на последнее место, то получим число $\overline{abcde1}$, или $10x+1$. Из условия известно, что $10x+1=3(1\cdot 10^5+x)$. Откуда получаем, что $x=42857$.

Ответ: 142857.

6. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти отрезки на которые точка D делит гипотенузу, если $AC=4$, а $BC=3$.

Решение.

По теореме Пифагора $AB^2=BC^2+CA^2$, откуда $AB=5$. Из метрических соотношений в прямоугольном треугольнике следует, что $BC^2=AB\cdot BD$, откуда $BD=\frac{BC^2}{AB}=\frac{9}{5}$. Аналогично, $CA^2=AB\cdot AD$, откуда $AD=\frac{CA^2}{AB}=\frac{16}{5}$.

Ответ: $\frac{9}{5}$ и $\frac{16}{5}$.

7. *(3 балла)* Найдите все решения уравнения $(x-|x|)^2+2020\,(x+|x|)=2020$.

Решение.

Раскроем модуль

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0;\\ 2020\cdot 2x=2020;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0;\\ 4x^2=2020;\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0;\\ x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0;\\ x=\pm\sqrt{505}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ответ: $-\sqrt{505}; 0{,}5$.

8. *(3 балла)* Вычислить

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{10+\sqrt{99}}.$$

Решение.
Домножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю

$$\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(10+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{1}=$$
$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=10-1=9.$$

Ответ: 9.

9. *(3 балла)* Найдите число $x<0$, если $x^2=542\cdot 544+1$.
Решение.

$$x^2=(543-1)(543+1)+1 \Leftrightarrow x^2=543^2.$$

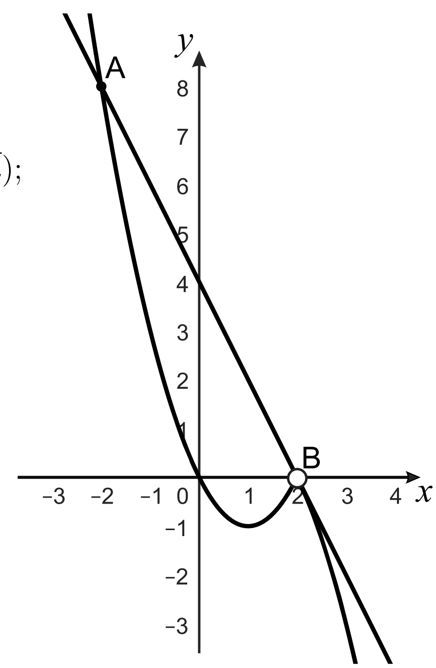
Учитывая, что $x<0$ получаем $x=-543$.
Ответ: -543.

10. *(3 балла)* В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB=5$, $BC=7$, $AC=11$.
Решение.
Рассмотрим прямоугольные треугольники ACC_2 и AA_2C в них C_2B_1 и A_2B_1 соответственно будут медианами, опущенными из вершины прямого угла, а значит $C_2B_1=A_2B_1=\frac{AC}{2}$. Аналогично для пар треугольников BC_2C, BB_2C и BA_2A, BB_2A. Тогда длина ломанной будет равна $2\cdot\left(\frac{AB}{2}+\frac{BC}{2}+\frac{AC}{2}\right)=5+7+11=23$.
Ответ: 23.

11. *(4 балла)* Известно, что $\sqrt{28-a}-\sqrt{13-a}=3$. Найдите $\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a}$.
Решение. Домножим обе части равенства на выражение, сопряженное выражению в левой части

$$(\sqrt{28-a}-\sqrt{13-a})\cdot(\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a})=3\cdot(\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a});$$
$$28-a-13+a=3\cdot(\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a});$$
$$\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a}=\frac{15}{3}=5.$$

Ответ: 5.



12. *(5 баллов)* Построить график функции $y=\frac{|x-2|}{2-x}\cdot(x^2-2x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y=-2x+4$.

Решение. При условии $x>2$ получаем, что $y=-(x^2-2x)$, а при условии $x<2$ получаем, что $y=x^2-2x$. Построим график кусочно-заданной функции

$$y=\begin{cases}-(x^2-2x) & \text{при } x>2\\ x^2-2x & \text{при } x<2.\end{cases}$$

и график прямой $y=-2x+4$. Заметим, что прямая пересекает график данной функции только в точке A и найдем её координаты решив уравнение $x^2-2x=-2x+4$. Корнями уравнения будут числа $x_1=2$ – посторонний корень, и $x_2=-2$. Значит точка A имеет координаты $(-2;8)$.
Ответ: $(-2;8)$.

13. *(5 баллов)* При каких значениях параметра a решением системы неравенств $\begin{cases} 2x+3a \leqslant 1, \\ 2-x \leqslant a \end{cases}$ будет отрезок не менее 2. **Решение.**
$\begin{cases} 2x+3a \leqslant 1, \\ 2-x \leqslant a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant \frac{1-3a}{2}, \\ x \geqslant 2-a \end{cases}$

Система имеет решение, если $2-a \leqslant \frac{1-3a}{2} \Leftrightarrow a \leqslant -3$. Её решением будет отрезок $[2-a; \frac{1-3a}{2}]$. Длина отрезка не менее 2, если $|\frac{1-3a}{2}-(2-a)| \geqslant 2 \Leftrightarrow |a+3| \geqslant 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant 1, \\ a \leqslant -7 \end{array}\right.$ Учитывая, что $a \leqslant -3$, получаем $a \leqslant -7$.
Ответ: $a \leqslant -7$

14. *(4 балла)* Основание AD трапеции $ABCD$ равно 12, $\angle ABD = \angle BCD$, диагональ BD равна 6. Найдите площадь треугольника BCD, если площадь трапеции равна 40.
Решение. Рассмотрим треугольники ABD и BCD: $\angle ABD = \angle BCD$ (по условию); $\angle ADB = \angle CBD$ (как накрест лежащие углы), значит $\triangle\ ABD \sim \triangle\ BCD$. Причем коэффициент подобия равен $\frac{AD}{BD} = 2$. Тогда, если $S_{BCD} = S$, то $S_{ABD} = 4S$. Получаем, что $S_{ABCD} = 5S = 40$, откуда $S = 8$.
Ответ: 8.

15. *(5 баллов)* Из города в одном направлении выезжают три автомобиля с интервалом 30 минут. Первый едет со скоростью 50 км/ч, второй – 40 км/ч. Третий автомобиль догоняет второй, а еще через 4 часа догоняет первый. Найдите скорость третьего автомобиля.
Решение. Пусть скорость третьего автомобиля x $(x > 50)$ км/ч, время через которое он догонит второй автомобиль y часов, тогда первый автомобиль он догонит через $y+4$ часа. Второй автомобиль за 1/2 часа успел отдалиться от третьего на 20 км, скорость третьего автомобиля относительно первого равна $x-40$, получаем уравнение первое $y = \frac{20}{x-40}$. Скорость с которой третий автомобиль будет догонять первый равна $x-50$, а расстояние, на которое успел уехать первый автомобиль равно 50 км, тогда $y+4 = \frac{50}{x-50}$. Получаем уравнение

$$\frac{20}{x-40} + 4 = \frac{50}{x-50} \Leftrightarrow 20(x-50) + 4(x-40)(x-50) = 50(x-40) \Leftrightarrow 4x^2 - 390x + 9000 = 0.$$

Корни которого $x_1 = 37{,}5 < 50$ – не подходит и $x_2 = 60$.
Ответ: 60 км/ч.

Критерии:
1.*2 балла* за верный ответ.
2.*3 балла* за верный ответ.
3. *3 балла* – получен верный ответ.
4.*2 балла* за верный ответ.
5. *1 балл* – найдено 42857 или 428571 ;
3 балла – верный ответ.
6. *1 балл* – указано одно верное значение;
2 балла – указаны два верных значения.
7. *1 балл* – верно найден только один корень;
-1 балл – найден посторонний корень;
3 балла – оба корня верные.
8. *3 балла* за верный ответ.
9. *-1 балл* – найден посторонний корень;
3 балла – верно указаны корни.
10. *3 балла* за верный ответ.
11. *+1 балл* – верно указано ОДЗ (при решении иррационального уравнения);
+2 балла – верно найленое число а ($a = 12$);
4 балла – верное решение.
12. *+2 балла* – получение верной кусочно-заданной функции;
+2 балла – за построение графика кусочно-заданной функции;
+1 балл – за обоснованное нахождение точки пересечения графиков функций;
-1 балл – если не учтено ООФ.
13. *+1 балл* – верно преобразованная система неравенств;
+1 балл – за верную оценку концов промежутка;
+1 балл – за верную запись длины отрезка;
5 баллов – за полное верное решение.
14. *+1 балла* – доказано подобие треугольников ABC и BCD;
+1 балл – найден коэффициент подобия;
+2 балла – обоснованно найдена искомая площадь;
-1 балл – арифметическая ошибка.
15. *+2 балла* – верно составлено уравнение;
+2 балла – верно решено рациональное уравнение;
+1 балл – получен верный ответ;
1 балл – получен верный ответ методом подбора.

Вариант 2.
Часть 1.

1. *(2 балла)* Найти число, если 37% его равны $\left(3{,}375 : \dfrac{3}{16} + \dfrac{5}{6} \cdot 0{,}6\right)$.

Решение.

$$\left(3{,}375 : \frac{3}{16} + \frac{5}{6} \cdot 0{,}6\right) : 0{,}37 = \left(\frac{27}{8} \cdot \frac{16}{3} + 0{,}5\right) \cdot \frac{100}{37} = \frac{18{,}5 \cdot 100}{37} = 50.$$

Ответ: 50.

2. *(3 балла)* Упростить выражение

$$\left(a^2 - b^2\right) \cdot \left(\frac{2a^2b + 2ab^2}{7a^3 + a^2b + 7ab^2 + b^3} \cdot \frac{7a + b}{a^2 - b^2} + \frac{a - b}{a^2 + b^2}\right).$$

Решение.

$$\left(a^2 - b^2\right) \cdot \left(\frac{2ab(a+b)}{(7a+b)(a^2+b^2)} \cdot \frac{7a+b}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{(a^2-b^2)2ab(a+b)}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)} + \frac{(a^2-b^2)(a-b)}{a^2+b^2} =$$
$$= \frac{(a+b)(2ab+(a-b)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)(2ab+a^2-2ab+b^2}{a^2+b^2} = a+b.$$

Ответ: $a + b$.

3. *(3 балла)* Цена входного билета в парк 150 рублей. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор на 25%. На сколько рублей изменилась цена билета, если изначально был по крайней мере один зритель?

Решение.
Пусть x – количество зрителей до понижения цены, тогда $1{,}5x$ – количество зрителей после понижения цены на билет. Если y – новая цена билета, то получаем уравнение $1{,}5x \cdot y = 150x \cdot 1{,}25$, откуда $y = 125$.
Цена изменилась на $150 - 125 = 25$.
Ответ: 25.

4. *(2 балла)* Решить неравенство

$$3\left(x - 1 + \frac{4-3x}{4} - \left(1 - 2 \cdot \left(x - 1 - \frac{x+2}{5}\right)\right)\right) > 5x - 7.$$

Решение.

$$3\left(x - 1 + \frac{4-3x}{4} - \left(3 - 2x + \frac{2x+4}{5}\right)\right) > 5x - 7$$
$$3\left(3x - 4 + \frac{4-3x}{4} - \frac{2x+4}{5}\right) > 5x - 7;$$
$$\left(9x - 12 + \frac{12-9x}{4} - \frac{6x+12}{5}\right) > 5x - 7;$$
$$(180x - 240 + 5(12-9x) - 4(6x+12)) > 100x - 140;$$
$$111x - 228 > 100x - 140;$$
$$11x > 88.$$

Ответ: $x > 8$.

5. *(3 балла)* Шестизначное число начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите данное число.

Решение.

Рассмотрим число $\overline{2abcde}$ и заменим $\overline{abcde}$ на x и тогда представим это число в виде $2 \cdot 10^5 + x$. Если перенести цифру 2 на последнее место, то получим число $\overline{abcde2}$, или $10x + 2$. Из условия известно, что $10x + 2 = 3(2 \cdot 10^5 + x)$. Откуда получаем, что $x = 85714$.

Ответ: 285714.

6. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CD. Найти AC и AB, если $CD = 3$, а $CB = 5$.

Решение.

По теореме Пифагора $BC^2 = CD^2 + DB^2$, откуда $BD = 4$. Из метрических соотношений в прямоугольном треугольнике следует, что $BC^2 = AB \cdot BD$, откуда $AB = \frac{BC^2}{BD} = \frac{25}{4}$. По теореме Пифагора $AB^2 = BC^2 + CA^2$, откуда $AC = \frac{15}{4}$.

Ответ: $\frac{15}{4}$ и $\frac{25}{4}$.

7. *(3 балла)* Найдите все решения уравнения $(x - |x|)^2 + 2304(x + |x|) = 2304$.

Решение.

Раскроем модуль

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0; \\ 2304 \cdot 2x = 2304; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 0; \\ 4x^2 = 2304; \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0; \\ x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 0; \\ x = \pm 24. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $-24; 0{,}5$.

8. *(3 баллов)* Вычислить

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{11+\sqrt{119}}.$$

Решение.

Домножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю

$$\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{4})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \ldots + \frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{(11+\sqrt{119})(\sqrt{121}-\sqrt{119})} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2} = \frac{11-1}{2} = 5.$$

Ответ: 5.

9. *(3 балла)* Найдите целое число $x > 0$, если $x^2 = 734 \cdot 738 + 4$.

Решение.

$$x^2 = (736-2)(736+2) + 4 \Leftrightarrow x^2 = 736^2;$$

Учитывая, что $x > 0$ получаем $x = 736$.

Ответ: 736.

10. *(3 балла)* В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Найдите длину ломанной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, если $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 13$.

Решение.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ACC_2 и AA_2C в них C_2B_1 и AA_2C соответственно будут медианами, опущенными из вершины прямого угла, а значит $C_2B_1 = A_2B_1 = \frac{AC}{2}$. Аналогично для пар треугольников BC_2C, BB_2C и BA_2A, BB_2A. Тогда длина ломанной будет равна $2 \cdot (\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2}) = 7 + 9 + 14 = 29$.

Ответ: 29.

11. *(4 балла)* Известно, что $\sqrt{39-a} + \sqrt{27-a} = 4$. Найдите $\sqrt{39-a} - \sqrt{27-a}$.

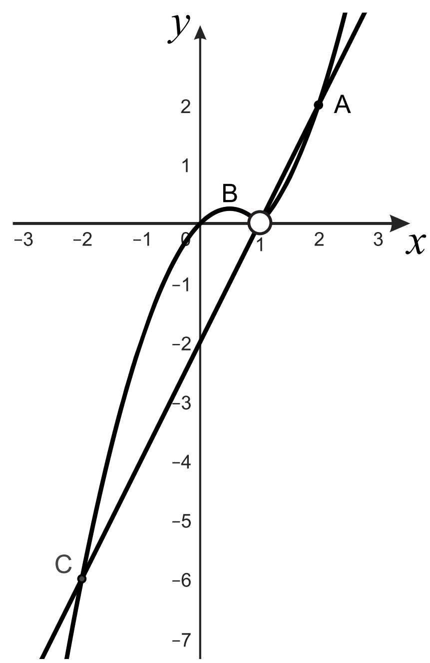
Решение.

Домножим обе части равенства на выражение, сопряженное выражению в левой части

$$(\sqrt{39-a} + \sqrt{27-a}) \cdot (\sqrt{39-a} - \sqrt{27-a}) = 4 \cdot (\sqrt{39-a} - \sqrt{27-a});$$
$$39 - a - 27 + a = 4 \cdot (\sqrt{39-a} - \sqrt{27-a});$$
$$\sqrt{39-a} - \sqrt{27-a} = \frac{12}{4} = 3.$$

Ответ: 3.

12. Построить график функции $y = \dfrac{|x-1|}{1-x} \cdot (-x^2 + x)$ и найти точки его пересечения с графиком функции $y = 2x - 2$.



Решение. При условии $x > 1$ получаем, что $y = x^2 - x$, а при условии $x < 1$ получаем, что $y = -x^2 + x$. Построим график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} x^2 - x & \text{при } x > 1 \\ -x^2 + x & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

и график прямой $y = 2x - 2$. Заметим, что прямая пересекает график данной функции в точках A и С найдем их координаты решив уравнения $x^2 - x = 2x - 2$ и $-x^2 + x = 2x - 2$. Корнями первого уравнения будут числа $x_1 = 1$ – посторонний корень, и $x_2 = 2$, значит точка A имеет координаты $(2; 2)$; корнями второго уравнения будут числа $x_1 = 1$ – посторонний корень, и $x_2 = -2$, значит точка C имеет координаты $(-2; -6)$.

Ответ: $(2; 2)$ и $(-2; -6)$.

13. *(5 баллов)* При каких значениях параметра a решением системы неравенств $\begin{cases} x - a \geqslant 1, \\ x + a \leqslant 3 \end{cases}$ будет отрезок не более 4.

Решение.

$\begin{cases} x - a \geqslant 1, \\ x + a \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 + a, \\ x \leqslant 3 - a \end{cases}$

Система имеет решения, если $1 + a \leqslant 3 - a$, т.е. $a \leqslant 1$. Её решением будет отрезок $[1 + a; 3 - a]$. Длина отрезка не более 4, если $|3 - a - 1 - a| \leqslant 4 \Leftrightarrow |a - 1| \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant a \leqslant 3$. Учитывая, что $a \leqslant 1$, получаем $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Ответ: $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

14. *(4 балла)* Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 12, $\angle ADC = \angle BAC$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника ADC равна 36.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и DCA: $\angle BAC = \angle CDA$ (по условию); $\angle ACB = \angle DAC$ (как накрест лежащие углы), значит $\triangle\ ABC \sim \triangle\ DCA$. Причем коэффициент подобия равен $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Тогда, если $S_{ABC} = \frac{4}{9}S_{ACD} = 16$. Получаем, что $S_{ABCD} = 16 + 36 = 52$.

Ответ: 52.

15. *(5 баллов)* Из города в одном направлении выезжают одновременно две машины. Скорость первой машины 50 км/ч, второй – 60 км/ч. Через час из этого же города выезжает третья машина, которая догоняет вторую на 1 час 20 минут позже, чем первую. Найдите скорость третьей машины.

Решение. Пусть скорость третьей машины x ($x > 60$) км/ч, время через которое она догонит первую машину y часов, тогда вторую машину она догонит через $y + \frac{4}{3}$ часа. Первая машина за 1 час успела отдалиться от третьей на 50 км, скорость третьей машины относительно первой равна $x - 50$? получаем уравнение первое $y = \frac{50}{x-50}$. Вторую машину третья будет догонять со скоростью $x - 60$, а расстояние, на которое успела уехать вторая машина равно 60 км, тогда $y + \frac{4}{3} = \frac{60}{x-60}$. Получаем уравнение

$$\frac{50}{x-50} + \frac{4}{3} = \frac{60}{x-60} \Leftrightarrow 150(x-60) + 4(x-50)(x-60) = 180(x-50) \Leftrightarrow 2x^2 - 235x + 6000 = 0.$$

Корни которого $x_1 = 37{,}5 < 60$ – не подходит и $x_2 = 80$.

Ответ: 80 км/ч.

Критерии:

1.*2 балла* за верный ответ.
2.*3 балла* за верный ответ.
3. *2 балла* – найдена правльная цена билета 125;
3 балла – получен верный ответ.
4.*2 балла* за верный ответ.
5. *1 балл* – найдено число 85714 или 857142;
3 балла – верный ответ.
6. *1 балл* – указано одно верное значение;
2 балла – указаны два верных значения.
7. *1 балл* – верно найден только один корень;
-1 балл – найден посторонний корень;
3 балла – оба корня верные.
8. *3 балла* за верный ответ.
9. *-1 балл* – найден посторонний корень;
3 балла – верно указаны корни.
10. *3 балла* за верный ответ.
11. *+1 балл* – верно указано ОДЗ (при решении иррационального уравнения);
+2 балла – верно найленое число а ($a = 26,75$);
4 балла – верное решение.
12. *+2 балла* – получение верной кусочно-заданной функции;
+2 балла – за построение графика кусочно-заданной функции (в том числе по точкам);
+1 балл – за обоснованное нахождение точки пересечения графиков функций;
-1 балл – если не учтено ООФ.
13. *+1 балл* – верно преобразованная система неравенств;
+1 балл – за верную оценку концов промежутка;
+1 балл – за верную запись длины отрезка;
5 баллов – за полное верное решение.
14. *+1 балла* – доказано подобие треугольников ABC и BCD;
+1 балл – найден коэффициент подобия;
+2 балла – обоснованно найдена искомая площадь;
-1 балл – арифметическая ошибка.
15. *+2 балла* – верно составлено уравнение;
+2 балла – верно решено рациональное уравнение;
+1 балл – получен верный ответ;
1 балл – получен верный ответ методом подбора.