СУНЦ УрФУ
Разбор вступительного экзамена по математике для поступающих в 10ФМФТМИ, 2024 год
Вариант 1

Часть 1

Номер задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ответ:	4	-6	6	$\pm\frac{1}{9}$	636363945	$(6,2)$	$\frac{x+4}{3x-2}$	20	$3\sqrt{2}$	2

1. *(2 балла)* Вычислите $\dfrac{1013^3+1011^3}{2024}-1013\cdot 1011$.

Решение. Проведем следующие преобразования

$$\frac{1013^3+1011^3}{2024}-1013\cdot 1011=\frac{(1013+1011)(1013^2-1013\cdot 1011+1011^2)}{2024}-1013\cdot 1011=$$

$$=\frac{2024(1013^2-1013\cdot 1011+1011^2)}{2024}-1013\cdot 1011=1013^2-2\cdot 1013\cdot 1011+1011^2=(1013-1011)^2=2^2=4.$$

Ответ. 4.

2. *(2 балла)* Решите уравнение $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0$.

Решение. Поскольку $(x^2-36)^2\geqslant 0$, $(x^2+4x-12)^2\geqslant 0$ для любых значений x, сумма этих выражений будет равна нулю только при условии $\begin{cases} x^2-36=0, \\ x^2+4x-12=0. \end{cases}$ Единственным решением этой системы является $x=-6$.

Ответ. $x=-6$.

3. *(2 балла)* Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка, длины которых равны 6 см и 3 см. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.

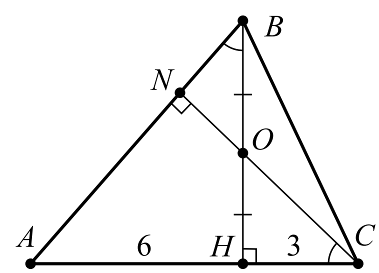

Рис. 1

Решение. Пусть в треугольнике ABC высота BH делит сторону AC на отрезки $AH=6$, $HC=3$, высота CN пересекает высоту BH в ее середине O (рис. 1). Тогда прямоугольные треугольники COH и ABH подобны ($\angle ABH=\angle ACN=90^\circ-\angle BAC$). Составим отношение сходственных сторон $\dfrac{OH}{AH}=\dfrac{CH}{BH}$ и подставим известные величины $\dfrac{0{,}5BH}{6}=\dfrac{3}{BH}$, откуда $BH=6$.

Ответ. 6.

4. *(2 балла)* Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отношение суммы первых четырех членов которой к сумме первых двух членов равно $\dfrac{82}{81}$.

Решение. По формуле суммы первых членов геометрической прогрессии имеем $S_4=\dfrac{b_1(q^4-1)}{q-1}$, $S_2=\dfrac{b_1(q^2-1)}{q-1}$. Тогда $\dfrac{S_4}{S_2}=\dfrac{q^4-1}{q^2-1}=\dfrac{(q^2-1)(q^2+1)}{q^2-1}=q^2+1$. Получаем уравнение $q^2+1=\dfrac{82}{81}$, откуда $q^2=\dfrac{1}{81}$, $q=\pm\dfrac{1}{9}$.

Заметим, что при $q = 1$ получим $S_4/S_2 = 4b_1/(2b_1) = 2 \neq 82/81$.

Ответ. $q = \pm\dfrac{1}{9}$.

5. *(2 балла)* Какое наибольшее число, делящееся на 45, можно получить вычеркивая цифры у десятизначного числа $A = 6363639451$ (при этом **не** разрешается переставлять цифры)?

Решение. Для деления на 45 необходимо и достаточно, чтобы число делилось на 5 и на 9. Для деления на 5 из числа A нужно вычеркнуть последнюю единицу. Сумма оставшихся цифр равна 45 и делится на 9, поэтому число 636363945 искомое.

Ответ. 636363945.

6. *(3 балла)* Найдите значения x и y, при которых достигается наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 - 6xy + 9y^2 + 4} + |x + 2y - 10|$.

Решение. Выделяя полный квадрат, приходим к

$$\sqrt{x^2 - 6xy + 9y^2 + 4} + |x + 2y - 10| = \sqrt{(x - 3y)^2 + 4} + |x + 2y - 10|.$$

Поскольку $(x - 3y)^2 \geqslant 0$, выражение $\sqrt{(x - 3y)^2 + 4}$ принимает свое наименьшее значение при $x = 3y$. Аналогично $|x + 2y - 10|$ принимает свое наименьшее значение при $x + 2y = 10$. Получаем систему $\begin{cases} x = 3y, \\ x + 2y = 10, \end{cases}$ решая которую, находим $x = 6$ и $y = 2$.

Ответ. $x = 6$, $y = 2$.

7. *(3 балла)* Известно, что $f\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right) = \dfrac{x+1}{x-1}$ при $x \neq -2; 1$. Найдите $f(x)$.

Решение. Сделаем замену $\dfrac{3x-1}{x+2} = t$, откуда $3x - 1 = tx + 2t$ или $(3 - t)x = 2t + 1$. Заметим, что уравнение $\dfrac{3x-1}{x+2} = 3$ не имеет решений, поэтому $t \neq 3$ и можно выразить $x = \dfrac{2t+1}{3-t}$, откуда

$$f(t) = \frac{\frac{2t+1}{3-t} + 1}{\frac{2t+1}{3-t} - 1} = \frac{t+4}{3t-2}.$$

Таким образом получаем явный вид функции $f(x) = \dfrac{x+4}{3x-2}$.

Ответ. $f(x) = \dfrac{x+4}{3x-2}$.

8. *(3 балла)* Банк выдал предпринимателю кредит в сумме 500000 рублей на 2 года под некоторый процент годовых. Через год банковская ставка была уменьшена на 2%. В конце второго года предприниматель вернул банку 708000 рублей. Под какой первоначальный процент был выдан кредит?

Решение. Пусть p — первоначальный процент, деленный на 100. Тогда в конце первого года долг предпринимателя составил $500(1 + p)$ тысяч рублей, в конце второго года — $500(1 + p)(1 + p - 0{,}02)$ тысяч рублей. Получаем уравнение $500(1 + p)(0{,}98 + p) = 708$, после его преобразования получим квадратное уравнение $p^2 + 1{,}98p - 0{,}436 = 0$, корнями которого являются $p = 0{,}2$ и $p = -2{,}18$. Нам подходит $p = 0{,}2$, что соответствует 20% годовых.

Ответ. 20.

9. *(3 балла)* В окружность радиуса 6 см вписан правильный треугольник. В этот треугольник вписана окружность, а в окружность — квадрат. Найдите сторону квадрата.

Решение. Используя формулы для вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников, последовательно получаем: сторона треугольника $a = 6\sqrt{3}$, радиус вписанной в него окружности $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = 3$ (или сразу $r = R/2 = 3$), и сторона квадрата $b = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Ответ. $3\sqrt{2}$.

10. *(3 балла)* Натуральное число x_n состоит из n единиц (например, $x_5 = 11111$). Обозначим через $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ — сумму первых n членов последовательности $\{x_n\}$. Какая цифра стоит на 10-ом месте справа у числа S_{29}?

Решение. При вычислении S_9 сумма цифр в каждом разряде не превосходит 9, откуда $S_9 = 123456789$. Нам необходимо определить 10-ю цифру справа у числа S_{29}, поэтому все более старшие цифры у чисел $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{29}$ не будут влиять на искомую цифру. Кроме того, запись чисел x_{11}, $x_{12}, \dots, x_{29}$ до десятой цифры совпадает с x_{10}, поэтому достаточно определить 10-ю цифру справа у суммы

$$S_9 + 20 \cdot x_{10} = 123\,456\,789 + 22\,222\,222\,220 = 22\,345\,679\,009.$$

Ответ. 2.

Часть 2

11. *(6 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{5x-4} \leqslant \dfrac{\sqrt{2x-3}}{3x+2}$.

Решение. Найдем ОДЗ неравенства: $\begin{cases} 2x-3 \geqslant 0, \\ 5x-4 \neq 0, \\ 3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{2}$. Заметим, что на этом промежутке $5x-4 > 0$ и $3x+2 > 0$, поэтому можно умножить обе части неравенства на общий знаменатель, откуда получаем $\sqrt{2x-3}(3x+2) - \sqrt{2x-3}(5x-4) \leqslant 0$, вынесем общий множитель за скобки $\sqrt{2x-3}(6-2x) \leqslant 0$, это неравенство выполняется при $6 - 2x \leqslant 0$ или $2x - 3 = 0$, откуда получим $x \geqslant 3$, $x = 3/2$.

Ответ. $x \geqslant 3$, $x = 3/2$.

12. *(6 баллов)* Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48. На его сторонах AD и BC выбраны соответственно точки X и Y так, что $AX : XD = 4 : 3$ и $BY : YC = 2 : 5$. Отрезки AY и BX пересекаются в точке K, а отрезки CX и DY — в точке L. Найдите сумму площадей треугольников AKB и CLD.

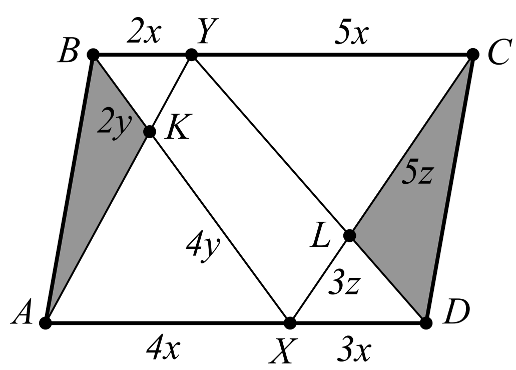

Рис. 2

Решение. Обозначим длину высоты BH через h, длину стороны AD параллелограмма через $7x$. Из условия следует, что $AX = 4x$, $XD = 3x$, $BY = 2x$ и $CY = 5x$ (рис. 2). Пусть S — это площадь параллелограмма $ABCD$, тогда $S = 7xh$, $S_{ABX} = 4xh/2 = 2S/7$ и $S_{CDX} = 3xh/2 = 3S/14$. Треугольники AKX и YKB подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $4x/2x = KX : BK$, откуда $S_{ABK} = \frac{2y}{6y} \cdot S_{ABX} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S}{7} = 2S/21$. Аналогично $S_{CLD} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3S}{14} = 15S/112$. В результате

$$S_{ABK} + S_{CLD} = \frac{S}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{15}{16}\right) = \frac{S}{7} \cdot \frac{77}{48} = \frac{11S}{48} = 11.$$

Ответ. 11.

13. *(6 баллов)* Петя (ходит первым) и Виктор (ходит вторым) играют в игру «Больше–меньше». Правила этой игры следующие: участникам раздают по одной карточке, на которой написано натуральное число от 10 до 20 (включительно, т.е. в колоде ровно 11 различных карт); игрок видит только свое число; в свой ход игрок может сказать «больше» (если он уверен, что его число больше числа соперника), «меньше» (если он уверен, что его число меньше числа соперника), во всех остальных случаях игрок говорит «пас». У нас есть запись партии: «пас», «пас», «пас», «пас», «пас», «больше» (Виктор). Определите числа каждого из участников в этой партии. Ответ обосновать.

Решение. Пусть a и b — числа на карточках Пети и Виктора соответственно. Первый «пас» Пети означает, что $a \neq 10$ и $a \neq 20$. Об этом знает Виктор и его «пас» означает, что $b \notin \{10, 11, 19, 20\}$ (иначе в первых двух случаях он сказал бы «меньше», а при $b = 20$ или $b = 19$ — «больше»). Аналогично рассуждая, приходим к следующим выводам.

Второй «пас» Пети: $a \notin \{10, 11, 12, 18, 19, 20\}$.

Второй «пас» Виктора: $b \notin \{10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}$.

Третий «пас» Пети: $a \notin \{10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20\}$, т.е. $a = 15$.

«Больше» Виктора означает, что $b = 16$.

Ответ. У Пети на карточке написано 15, у Виктора — 16.

14. *(7 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых единственное решение имеет система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 4y - x^2 + 4x = 0, \\ y = ax + 2a. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение легко преобразуется к виду $(y - x)(y + x) - 4(y - x) = 0$ или $(y - x)(y + x - 4) = 0$. Таким образом, решением первого уравнения является пара прямых $y = x$ и $y = -x + 4$, которые пересекаются в точке $A(2, 2)$ (рис. 3). Второе уравнение системы можно переписать в виде $y = a(x + 2)$, оно задает прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $B(-2, 0)$. Изменяя угловой коэффициент, мы получим три его значения, при которых прямая из второго уравнения системы пересекает решения первого уравнения в одной точке (на рисунке эти прямые обозначены через l_1, l_2 и l_3).

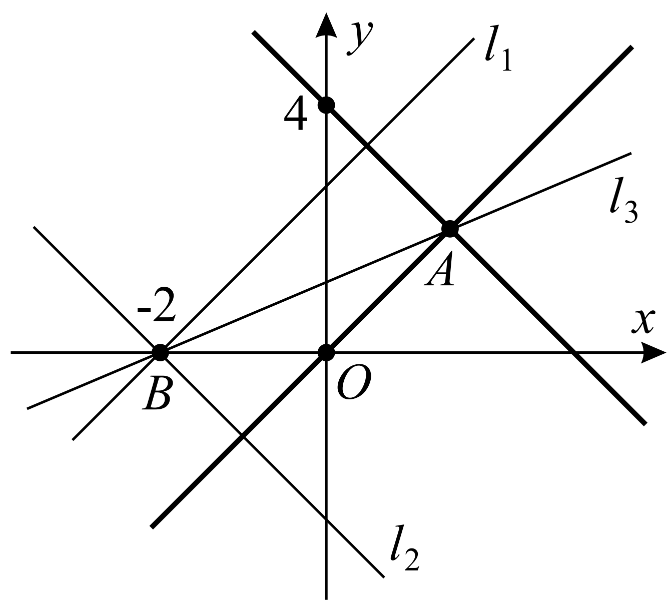

Рис. 3

1-й случай: прямая l_1 параллельна прямой $y = x$, тогда $a = 1$.

2-й случай: прямая l_2 параллельна прямой $y = -x + 4$, тогда $a = -1$.

3-й случай: прямая l_3 проходит через точку A, тогда $2 = a(2 + 2)$ или $a = 1/2$.

Ответ. $a \in \left\{-1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right\}$.

СУНЦ УрФУ
Разбор вступительного экзамена по математике
для поступающих в 10ФМФТМИ, 2024 год
Вариант 2

Часть 1

Номер задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ответ:	400	-7	40	$\pm\dfrac{1}{5}$	99636390	$(2,4)$	$\dfrac{5-x}{3x-3}$	15	$6\sqrt{2}$	3

1. *(2 балла)* Вычислите $\dfrac{1022^3+1002^3}{2024} - 1022\cdot 1002$.

Решение. Проведем следующие преобразования

$$\frac{1022^3+1002^3}{2024} - 1022\cdot 1002 = \frac{(1022+1002)(1022^2-1022\cdot 1002+1002^2)}{2024} - 1022\cdot 1002 =$$

$$= \frac{2024(1022^2-1033\cdot 1002+1002^2)}{2024} - 1022\cdot 1002 = 1022^2 - 2\cdot 1022\cdot 1002 + 1002^2 =$$

$$= (1022-1002)^2 = 20^2 = 400.$$

Ответ. 400.

2. *(2 балла)* Решите уравнение $(x^2-49)^2 + (x^2+4x-21)^2 = 0$.

Решение. Поскольку $(x^2-49)^2 \geqslant 0$, $(x^2+4x-21)^2 \geqslant 0$ для любых значений x, сумма этих выражений будет равна нулю только при условии $\begin{cases} x^2-49=0, \\ x^2+4x-21=0. \end{cases}$ Единственным решением этой системы является $x=-7$.

Ответ. $x=-7$.

3. *(2 балла)* Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка, длины которых равны 25 см и 32 см. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.

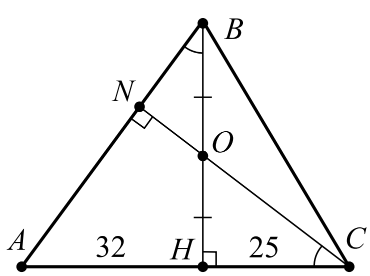

Рис. 1

Решение. Пусть в треугольнике ABC высота BH делит сторону AC на отрезки $AH=32$, $HC=25$, высота CN пересекает высоту BH в ее середине O. Тогда прямоугольные треугольники COH и ABH подобны ($\angle ABH = \angle ACN = 90^\circ - \angle BAC$). Составим отношение сходственных сторон $\dfrac{OH}{AH} = \dfrac{CH}{BH}$, подставим известные величины $\dfrac{0{,}5BH}{32} = \dfrac{25}{BH}$, откуда $BH=40$.

Ответ. 40.

4. *(2 балла)* Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отношение суммы первых четырех членов которой к сумме первых двух членов равно $\dfrac{26}{25}$.

Решение. По формуле суммы первых членов геометрической прогрессии имеем $S_4 = \dfrac{b_1(q^4-1)}{q-1}$, $S_2 = \dfrac{b_1(q^2-1)}{q-1}$. Тогда $\dfrac{S_4}{S_2} = \dfrac{q^4-1}{q^2-1} = \dfrac{(q^2-1)(q^2+1)}{q^2-1} = q^2+1$. Получаем уравнение $q^2+1 = \dfrac{26}{25}$, откуда $q^2 = \dfrac{1}{25}$, $q = \pm\dfrac{1}{5}$.

Заметим, что при $q=1$ получим $S_4/S_2 = 4b_1/(2b_1) = 2 \neq 26/25$.

Ответ. $q = \pm\dfrac{1}{5}$.

5. *(2 балла)* Какое наибольшее число, делящееся на 45, можно получить вычеркивая цифры у десятизначного числа $A = 9963639207$ (при этом **не** разрешается переставлять цифры)?

Решение. Для деления на 45 необходимо и достаточно, чтобы число делилось на 5 и на 9. Для деления на 5 из числа A нужно вычеркнуть последнюю семерку. Сумма оставшихся цифр равна 47. Вычеркнув двойку, мы получим число с суммой цифр 45, которая делится на 9, поэтому и само число кратно девяти.

Ответ. 99636390.

6. *(3 балла)* Найдите значения x и y, при которых достигается наименьшее значение выражения $\sqrt{4x^2-4xy+y^2+9}+|2x+y-8|$.

Решение. Выделяя полный квадрат, приходим к

$$\sqrt{4x^2-4xy+y^2+9}+|2x+y-8| = \sqrt{(2x-y)^2+9}+|2x+y-8|.$$

Поскольку $(2x-y)^2 \geqslant 0$, выражение $\sqrt{(2x-y)^2+9}$ принимает свое наименьшее значение при $2x=y$. Аналогично $|2x+y-8|$ принимает свое наименьшее значение при $2x+y=8$. Получаем систему $\begin{cases} 2x=y, \\ 2x+y=8, \end{cases}$ решая которую, находим $x=2$ и $y=4$.

Ответ. $x=2$, $y=4$.

7. *(3 балла)* Известно, что $f\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right) = \dfrac{x+2}{x-2}$ при $x \neq -1; 2$. Найдите $f(x)$.

Решение. Сделаем замену $\dfrac{2x-1}{x+1} = t$, откуда $2x-1 = tx+t$ или $(2-t)x = t+1$. Заметим, что уравнение $\dfrac{2x-1}{x+1} = 2$ не имеет решений, поэтому $t \neq 2$ и можно выразить $x = \dfrac{t+1}{2-t}$, откуда

$$f(t) = \frac{\frac{t+1}{2-t}+2}{\frac{t+1}{2-t}-2} = \frac{5-t}{3t-3}.$$

Таким образом получаем явный вид функции $f(x) = \dfrac{5-x}{3x-3}$.

Ответ. $f(x) = \dfrac{5-x}{3x-3}$.

8. *(3 балла)* Вкладчик положил в банк 50000 рублей. За первый год ему был начислен некоторый процент годовых, а во второй год банковская ставка была увеличена на 3%. В конце второго года на счете оказалось 67850 рублей. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

Решение. Пусть p — первоначальный процент, деленный на 100. Тогда в конце первого года сумма вклада составила $50(1+p)$ тысяч рублей, в конце второго года — $50(1+p)(1+p+0{,}03)$ тысяч рублей. Получаем уравнение $50(1+p)(1{,}03+p) = 67{,}85$. После его преобразования решаем квадратное уравнение $p^2+2{,}03p-0{,}327=0$, корнями которого являются $p=0{,}15$ и $p=-1{,}88$. Нам подходит $p=0{,}15$, что соответствует 15% годовых.

Ответ. 15.

9. *(3 балла)* В окружность радиуса 12 см вписан квадрат. В этот квадрат вписана окружность, а в окружность — правильный шестиугольник. Найдите сторону шестиугольника.

Решение. Используя формулы для вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников, последовательно получаем: сторона квадрата $a = 12\sqrt{2}$, радиус вписанной в него окружности $r = \dfrac{a}{2} = 6\sqrt{2}$ (или сразу $r = R/\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$), и сторона шестиугольника $b = r = 6\sqrt{2}$.

Ответ. $6\sqrt{2}$.

10. *(3 балла)* Натуральное число x_n состоит из n единиц (например, $x_5 = 11111$). Обозначим через $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ — сумму первых n членов последовательности $\{x_n\}$. Какая цифра стоит на 10-ом месте справа у числа S_{39}?

Решение. При вычислении S_9 сумма цифр в каждом разряде не превосходит 9, откуда $S_9 = 123456789$. Нам необходимо определить 10-ю цифру справа у числа S_{39}, поэтому все более старшие цифры у чисел x_{11}, x_{12}, …, x_{39} не будут влиять на искомую цифру. Кроме того, запись чисел x_{11}, x_{12}, …, x_{39} до десятой цифры совпадает с x_{10}, поэтому достаточно определить 10-ю цифру справа у суммы

$$S_9 + 30 \cdot x_{10} = 123\,456\,789 + 33\,333\,333\,330 = 33\,456\,790\,119.$$

Ответ. 3.

Часть 2

11. *(6 баллов)* Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{3x-4}}{5x-2} \leqslant \dfrac{\sqrt{3x-4}}{2x+7}$.

Решение. Найдем ОДЗ неравенства: $\begin{cases} 3x-4 \geqslant 0, \\ 5x-2 \neq 0, \\ 2x+7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{4}{3}$. Заметим, что на этом промежутке $5x-2 > 0$ и $2x+7 > 0$, поэтому можно умножить обе части неравенства на общий знаменатель, откуда получаем $\sqrt{3x-4}(2x+7) - \sqrt{3x-4}(5x-2) \leqslant 0$, вынесем общий множитель за скобки $\sqrt{3x-4}(9-3x) \leqslant 0$, это неравенство выполняется при $9-3x \leqslant 0$ или $3x-4 = 0$, откуда получим $x \geqslant 3$, $x = \dfrac{4}{3}$.

Ответ. $x \geqslant 3$, $x = \dfrac{4}{3}$.

12. *(6 баллов)* Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 96. На его сторонах AD и BC выбраны соответственно точки X и Y так, что $AX : XD = 2 : 5$ и $BY : YC = 4 : 3$. Отрезки AY и BX пересекаются в точке K, а отрезки CX и DY — в точке L. Найдите площадь четырехугольника $KXLY$.

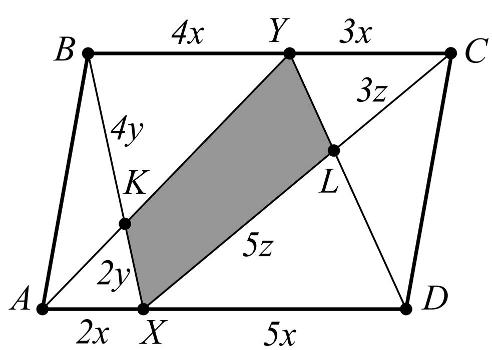

Рис. 2

Решение. Обозначим длину высоты BH через h, длину стороны AD параллелограмма через $7x$. Из условия следует, что $AX = 2x$, $XD = 5x$, $BY = 4x$ и $CY = 3x$ (рис. 2). Пусть S — это площадь параллелограмма $ABCD$, тогда $S = 7xh$, $S_{AYD} = S/2$, $S_{ABX} = 2xh/2 = S/7$ и $S_{CDX} = 5xh/2 = 5S/14$. Треугольники AKX и YKB подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $2x/4x = KX : BK$, откуда $S_{AKX} = \frac{2y}{6y} \cdot S_{ABX} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{7} = S/21$. Аналогично $S_{XLD} = \frac{5}{8} \cdot \frac{5S}{14} = 25S/112$. В результате

$$S_{KXLY} = \frac{S}{7}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{3} - \frac{25}{16}\right) = \frac{S}{7} \cdot \frac{77}{48} = \frac{11S}{48} = 22.$$

Ответ. 22.

13. *(6 баллов)* Полина (ходит первой) и Вика (ходит второй) играют в игру «Больше–меньше». Правила этой игры следующие: участницам раздают по одной карточке, на которой написано натуральное число от 20 до 30 (включительно, т.е. в колоде ровно 11 различных карт); игрок видит только свое число; в свой ход игрок может сказать «больше» (если она уверена, что ее число больше числа соперницы), «меньше» (если она уверена, что ее число меньше числа соперницы), во всех остальных случаях игрок говорит «пас». У нас есть запись партии: «пас», «пас», «пас», «пас», «пас», «меньше» (Вика). Определите числа каждой из участниц в этой партии. Ответ обосновать.

Решение. Пусть a и b — числа на карточках Полины и Вики соответственно. Первый «пас» Полины означает, что $a \neq 20$ и $a \neq 30$. Об этом знает Вика и ее «пас» означает, что $b \notin \{20, 21, 29, 30\}$ (иначе в первых двух случаях она сказала бы «меньше», а при $b = 30$ или $b = 29$ — «больше»). Аналогично рассуждая, приходим к следующим выводам.

Второй «пас» Полины: $a \notin \{20, 21, 22, 28, 29, 30\}$.

Второй «пас» Вики: $b \notin \{20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 30\}$.

Третий «пас» Полины: $a \notin \{20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$, т.е. $a = 25$.

«Меньше» Вики означает, что $b = 24$.

Ответ. У Полины на карточке написано 25, у Вики — 24.

14. *(7 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых единственное решение имеет система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 6y - x^2 - 6x = 0, \\ y = ax - 3a. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение легко преобразуется к виду $(y - x)(y + x) - 6(y + x) = 0$ или $(y - x - 6)(y + x) = 0$. Таким образом, решением первого уравнения является пара прямых $y = -x$ и $y = x + 6$, которые пересекаются в точке $A(-3, 3)$ (рис. 3). Второе уравнение системы можно переписать в виде $y = a(x - 3)$, оно задает прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $B(3, 0)$. Изменяя угловой коэффициент, мы получим три его значения, при которых прямая из второго уравнения системы пересекает решения первого уравнения в одной точке (на рисунке эти прямые обозначены через l_1, l_2 и l_3).

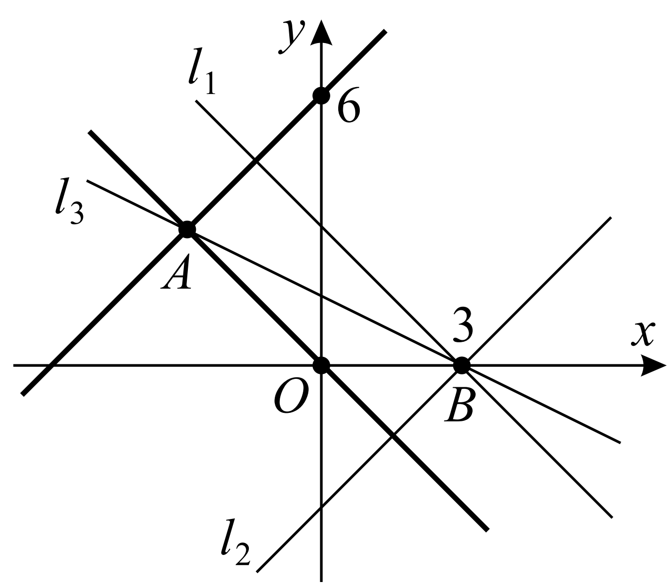

Рис. 3

<u>1-й случай:</u> прямая l_1 параллельна прямой $y = -x$, тогда $a = -1$.

<u>2-й случай:</u> прямая l_2 параллельна прямой $y = x + 6$, тогда $a = 1$.

<u>3-й случай:</u> прямая l_3 проходит через точку A, тогда $3 = a(-3 - 3)$ или $a = -1/2$.

Ответ. $a \in \left\{-1,\ 1,\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Критерии оценки

(одинаковые для обоих вариантов)

Первая часть:

Задача 4. 1 балл — за верно найденный один знаменатель прогрессии.

Задача 6. 1 балл — за верно найденное значение только одной переменной.

Задача 7. 1 балл — за верно найденный числитель или знаменатель результата.

Задача 8. 2 балла — за ответ в виде $p/100$, где p — верное значение.

Задача 10. 2 балла — за верно найденные последние десять цифр суммы.

Вторая часть:

Задача 11. 2 балла — за верно найденную область допустимых значений (ОДЗ).

2 балла — за верно найденный промежуток. 1 балл — если промежуток отличается от верного потерей одной границы.

2 балла — за верно найденный изолированный корень.

Отсутствие обоснования при переходе от исходного неравенства к неравенству между знаменателями — минус два балла.

Задача 12. по 1 баллу — за верно найденную площадь (за каждую) треугольника ABX и DCX (или ABY и DCY; «или» — исключающее).

по 1 баллу — за верно найденный коэффициент подобия (за каждый) треугольников с вершиной в точке K и L.

по 1 баллу — за верно найденную площадь (численное значение или в частях площади от площади параллелограмма) «малых» треугольников (за каждую из двух), участвующих в уравнении для искомой площади.

Задача 13. по 1 баллу — за верное объяснение каждого хода игроков.

Правильный ответ (включающий имена игроков и числа их карточек) без доказательства оценивается 1 баллом.

Задача 14.

Графический способ:

2 балла — за верное решение первого уравнения системы.

2 балла — за верное решение второго уравнения системы (с указанием точки, через которую проходит эта прямая).

по 1 баллу — за каждое из правильно найденных (с графическим или аналитическим обоснованнием) значений параметра.

Аналитический способ:

по 2 балла — правильно найденные значения параметра из-за линейного случая (за каждое значение).

3 балла — правильное найденное значение параметра в случае совпадения корней.

Каждая из вычислительных ошибок в задаче №14 оценивается минус 1 баллом.