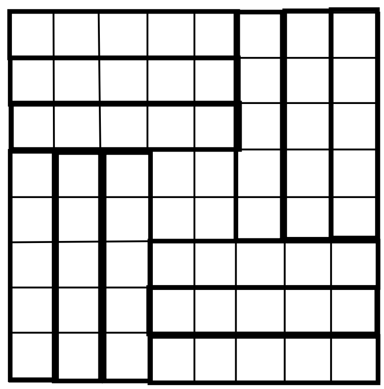
Блиц. Младшая лига

1. Юный Каземир очень любил раскрашивать квадраты. Так, например, квадрат клетчатой бумаги 8×8 клеток он красил, постепенно закрашивая прямоугольные полоски 5×1 клеток. Конечно, весь квадрат он так закрасить не сумел, но будучи довольно сообразительным, он смог закрасить максимально возможное количество таких прямоугольников. Сколько же?

   Ответ: 12.

   Решение. Ясно, что больше 12 полосочек не могло быть, так как большее количество полосочек занимает площадь не меньше $13 \cdot 5 > 64$, пример для 12 полосочек показан ниже на рисунке.



2. У короля есть три сына близнеца. У первого сына есть два наследника, у второго — три, а у третьего — пять. Всем известно, что старый король скоро объявит, какой именно сын сменит его на престоле. На какое наименьшее количество провинций можно разделить королевство так, чтобы при любом выборе старого короля, новый король мог бы раздать все провинции своим наследникам, и каждому из них досталась бы территория одинаковой площади?

   Ответ: 8.

   Решение. Пусть площадь всего королевства равна 30 (для удобства подсчета площади частей). Нам необходимо уметь делить его на 5 равных частей, значит, площадь каждой провинции не больше 6, откуда следует, что 6 провинций будет не достаточно (иначе при разбиении на 5 равных частей четыре части будут содержать ровно по одной провинции, тогда у нас будет хотя бы 4 провинции площадью 6, что противоречит возможности разбить на три равные части все королевство).

   Предположим, что возможно разделить королевство на 7 частей, тогда из аналогичных рассуждений следует, что есть хотя бы три провинции площадью 6. Но, как мы доказали выше, четырех провинций площадью 6 быть не может, получается, что их ровно три. Из возможности разбиения на три равные части следует, что среди оставшихся четырех провинций есть две провинции площадью 4, и что сумма площадей двух провинций также равна 4. Чтобы в итоге все провинции можно было разбить на пять равных частей, необходимо, чтобы две последние провинции имели площадь 2. Получилось, что площади всех провинций четные и это противоречит разбиению на две равные части – по 15.

   Пример на 8 провинций: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6.

3. В последовательности чисел, где первые три числа равны $2023, 2024, 2025$ соответственно, каждый член последовательности, начиная с четвертого, получен вычитанием предыдущего члена последовательности из суммы двух предшествующих ему (т.е., четвертый член будет равен $2023+2024-2025=2022$, пятый $2024+2025-2022=2027$ и т.д.). Найдите 2024-й член этой последовательности.

   Ответ: 2. *Решение.*Заметим, что элемент последовательности с номером $2n$ на 2 меньше элемента последовательности с номером $2(n-1)$, а элемент последовательности с номером $2n+1$ на 2 больше элемента последовательности с номером $2n-1$, значит, $a_{2024} = a_2 - 2 \cdot 1011 = 2$.

4. Найти остаток от деления суммы $S = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{2024\text{ раз}}$ на 13.

   Ответ: 12.

   Решение. Найдем цикл остатков от деления на 13: 3 дает остаток 3, 33 дает остаток 7, 333 дает остаток 8, 3333 дает остаток 5, 33333 дает остаток 1, 333333 дает остаток 0, далее остатки циклически повторяются, значит S по модулю 13 сравнима с $(3+7+8+5+1+0)\cdot 337+3+7=8098$, что при делении на 13 дает остаток 12.

Блиц. Старшая лига

1. В коробке в темном гараже у Татьяны валяются 24 тапочка, которые первоначально образовывали 12 пар: 3 разных цветов и 4 разных фасонов (одинаковых пар не было). Какое наименьшее число тапочек нужно достать из коробки Тане, чтобы наверняка получилось предложить подруге, приехавшей в гости, две пары тапочек разных цветов и одновременно разных фасонов? (Правый и левый тапочки на ощупь не различимы.)

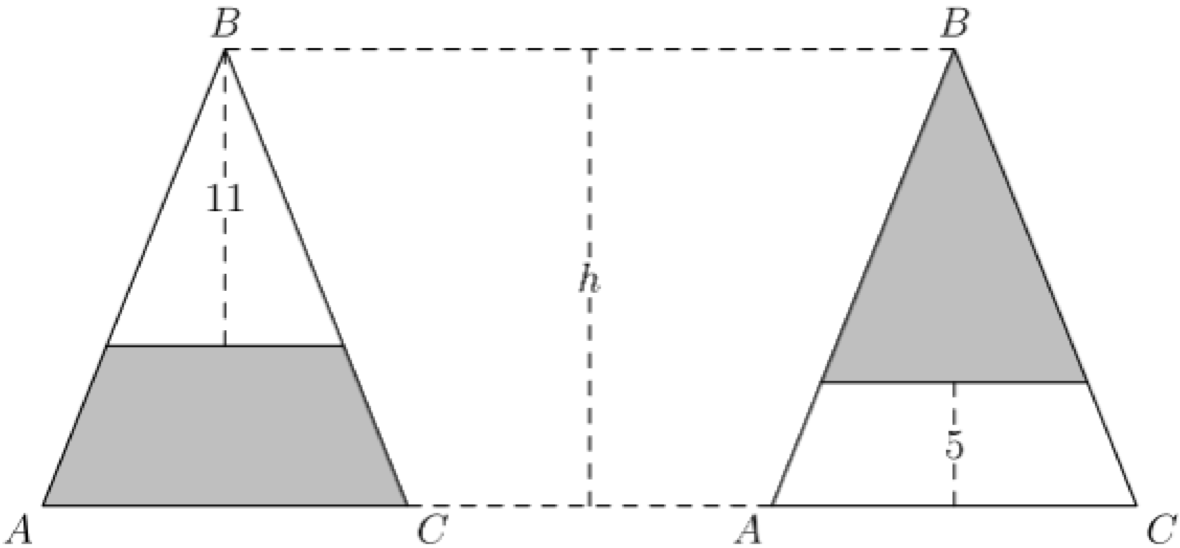
   Ответ: 17.

   Решение. Если взять не более 16 тапочек, то может случиться, что среди них найдется не более $16-12=4$ пар, причем все они могут оказаться одного цвета, поэтому такого количества не достаточно для гарантированного получения искомых 2 пар тапочек. Если взять 17 тапочек, то среди них найдется не менее $17-12=5$ пар, причем они будут представлять не менее 2 цветов (пар каждого цвета окажется не более 4) и не менее 2 фасонов (пар каждого фасона окажется не более 3), тогда выберем из них две пары разного цвета:
   а) если они еще и разного фасона, значит, они искомые;
   б) если они одного фасона, то добавим пару другого фасона, тогда она будет одного цвета с хотя бы одной из выбранных двух пар, то есть образует с ней искомые две пары.

2. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ провели отрезки параллельные AC (см. рисунок) так, чтобы заштрихованные части $\triangle ABC$ имели одинаковую площадь. Высота двух незаштрихованных частей составляет 11 и 5 единиц соответственно. Найдите высоту $\triangle ABC$.

   Ответ: $14,6$.

   Решение. Пусть площадь заштрихованной части равна S, тогда для левого треугольника
   $\frac{S_{ABC}-S}{S_{ABC}} = \left(\frac{11}{h}\right)^2$, а для правого $\frac{S}{S_{ABC}} = \left(\frac{h-5}{h}\right)^2$. Откуда получаем уравнение
   $1 - \frac{(h-5)^2}{h^2} = \frac{11^2}{h^2}$, корнем которого будет $h = 14,6$.



3. В арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_{200}$ сумма первых 100 членов равна 100, а сумма последних 100 членов равна 200. Найдите разность прогрессии.

   Ответ: $\frac{1}{100}$.

   Решение. По свойству арифметической прогрессии $a_{101} - a_1 = a_{102} - a_2 = ... = 100 \cdot d$, где d – разность этой прогрессии, тогда $200 - 100 = 100 \cdot 10 \cdot d$, откуда $d = \frac{1}{100}$.

4. В классе учится $24 < N < 40$ ребят. Все они написали контрольную по математике. Считается, что человек написал контрольную успешно, если он набрал не меньше 65 баллов. Оказалось, что средний балл всех ребят равен 66, средний балл написавших успешно равен 71, а средний балл написавших неуспешно равен 56. Позднее в условии одной из задач была обнаружена ошибка, и всем ребятам добавили по 5 баллов. После этого средний балл написавших успешно стал равен 75, а написавших неуспешно — 59. Сколько ребят учится в классе?

   Ответ: 36.

   Решение. Пусть x – число ребята, написавших успешно при первом подсчете, y – число остальных ребят, d – число ребят, написавших неуспешно при первом подсчете, но успешно при втором подсчете, тогда $66(x + y) = 71x + 56y$, тогда $x = 2y$. Так как $x + y < 40$, то $y < \frac{40}{3} < 14$. Средний балл всех ребят при втором подсчете $66+5 = 71$, поэтому $71(x+y) = 75(x+d)+59(y-d)$, откуда $y = 4d$, получаем варианты: $(x, y, z) = (8, 4, 1)$, $(x, y, z) = (16, 8, 2)$, $(x, y, z) = (24, 12, 3)$, с учетом условия на N, подходит только последний случай, который реализуется, если при первом подсчете трое ребят набрали по 62 балла, 12 ребят по 54 балла и 24 человека по 71 баллу.